

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVERS ASPECTS DE LA THÉORIE DES IDÉAUX D'UN ANNEAU COMMUTATIF
Autor: Lesieur, L.
Kapitel: 2. Radical de Jacobson de $k[X]$
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41528>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. RADICAL DE JACOBSON D'UN ANNEAU

Dans toute la suite, A désigne un anneau commutatif et unitaire. Nous supposons connues la notion d'idéal dans A , d'idéal premier, d'idéal maximal, d'anneau quotient, ainsi que les propriétés suivantes: tout idéal propre¹⁾ est contenu dans un idéal maximal (théorème de Krull); pour que l'idéal P soit premier, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/P soit intègre; pour que l'idéal M soit maximal, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/M soit un corps (pour ces définitions et propriétés, se reporter par exemple à [1], [3] ou [8]).

Définition 1. On appelle *radical de Jacobson* de l'anneau A l'intersection R_J de tous les idéaux maximaux M de A :

$$R_J = \bigcap M,$$

M décrivant l'ensemble de tous les idéaux maximaux.

Les éléments de R_J sont caractérisés par la propriété suivante.

THÉORÈME 1. *Le radical de Jacobson R_J de l'anneau A est un idéal dont tous les éléments x vérifient la propriété.*

(P): $1 - x$ est inversible dans A .

Et c'est le plus grand idéal ayant cette propriété.

En effet, soit $x \in R_J$. Si $1 - x$ n'était pas inversible, l'idéal $A(1 - x)$ constitué par les multiples de $1 - x$ serait propre, donc contenu dans un idéal maximal M . Mais on aurait alors: $x \in M$; $1 - x \in M$, d'où $1 \in M$, ce qui est impossible. Tous les éléments de R_J vérifient donc la propriété (P). D'ailleurs R_J est un idéal comme intersection d'idéaux (maximaux).

Réciproquement, soit I un idéal dont les éléments vérifient la propriété (P). Supposons $I \not\subseteq R_J$. Il existerait un idéal maximal M tel que $I \not\subseteq M$, donc un élément $i \in I$, $i \notin M$. Mais, M étant maximal, on a: $M + Ai = A$, d'où: $1 = m + ai$, $m \in M$, $a \in A$. L'élément ai appartient à I et, d'après la propriété (P), $1 - ai = m$ serait inversible, ce qui est impossible puisque M est propre. On a donc $I \subseteq R_J$.

2. RADICAL DE JACOBSON DE $k[X]$

Soit $A = k[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans un corps commutatif quelconque k . Nous allons démontrer que son radical de Jacobson est nul.

¹⁾ J'appelle idéal propre un idéal différent de A ; il ne contient pas l'élément unité 1 de A .

THÉORÈME 2. *Le radical de Jacobson de l'anneau $k[X]$ est nul (ou encore: l'idéal nul est l'intersection de tous les idéaux maximaux de $k[X]$).*

En effet, supposons $F \in R_J$, $F \neq 0$. On a donc:

$$F = b_0 X^n + \dots + b_n, \quad b_0 \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Afin de prendre un polynôme de degré positif, formons: $XF \neq 0$, $XF \in R_J$. Le polynôme $1 - XF$ serait donc inversible dans $k[X]$ d'après le théorème 1, ce qui est impossible puisque son degré est supérieur ou égal à 1.

On démontre exactement de la même façon:

THÉORÈME 2'. *Si A est intègre, le radical de Jacobson de l'anneau $A[X]$ est nul.*

Application. Soit $F \in k[X]$, $F \neq 0$. D'après le théorème 2, il existe donc un idéal maximal M ne contenant pas F . L'anneau $k[X]$ étant à idéaux principaux, l'idéal $M = A\Psi(X)$ est engendré par un polynôme irréductible sur k :

$$\Psi(X) = X^d + \dots + a_d, \quad d > 0.$$

L'anneau quotient $k[X]/M$ est un corps K (puisque M est maximal) qui contient un sous-corps isomorphe à k et que nous identifions avec k ; la classe ξ de X est un zéro de Ψ dans ce corps K (qui est l'extension algébrique simple $k(\xi)$). De plus, ce zéro ξ n'annule pas F puisque: $F(\xi) = 0 \Leftrightarrow F(X) \in M$. Donc:

THÉORÈME 3. *Si $F \in K[X]$, $F \neq 0$, il existe toujours ξ , algébrique sur k , tel que $F(\xi) \neq 0$.*

A chaque idéal maximal M de $A = k[X]$ est associé le polynôme irréductible $\Psi = X^d + \dots + a_d$. On peut préciser que ces idéaux maximaux, comme ces polynômes irréductibles, sont en nombre infini.

THÉORÈME 4.

- a) *il existe une infinité d'idéaux maximaux dans $k[X]$.*
- b) *il existe une infinité de polynômes irréductibles sur k dans $k[X]$.*
- c) *la clôture algébrique \bar{k} de k contient une infinité d'éléments.*

En effet, a) résulte de b) d'après la correspondance biunivoque existant entre les idéaux maximaux de $k[X]$ et les polynômes irréductibles sur k .

Démontrons b). S'il n'y avait qu'un nombre fini de polynômes irréductibles $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_h$, on pourrait former le polynôme produit $F = \Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_h \neq 0$. Il existerait un idéal maximal M ne contenant pas F , soit $M = A\Psi_s$, où Ψ_s est irréductible et figure donc dans les facteurs de F . Il en résulterait $F \in M$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Quant à la partie c) de l'énoncé, supposant connue la notion de clôture algébrique \bar{k} de k (le corps \bar{k} englobe tous les éléments algébriques sur k), il suffit de remarquer que les racines des polynômes irréductibles Ψ_i donnent une infinité d'éléments de \bar{k} . En effet, deux polynômes irréductibles Ψ_1 et Ψ_2 différents ne peuvent avoir une racine ξ commune puisque le polynôme Ψ_1 est déterminé par ξ comme base de l'idéal des polynômes de $k[X]$ s'annulant pour ξ . Il y a donc autant (ou plus) d'éléments $\xi \in \bar{k}$ que de polynômes irréductibles Ψ . Remarquons par contre que deux valeurs de ξ différentes peuvent définir le même polynôme Ψ ; c'est le cas de i et $-i$ pour l'anneau $R[X]$, qui sont deux racines distinctes du polynôme irréductible $X^2 + 1$.

Ainsi, la notion de radical de Jacobson d'un anneau donne une démonstration simple du théorème 4c, que l'on établit d'habitude par d'autres moyens. Si le corps k possède une infinité d'éléments, par exemple si sa caractéristique est nulle, l'existence d'une infinité d'éléments de \bar{k} est évidente. Par contre, si le corps k a la caractéristique p , par exemple si $k = \{0, 1\}$ est le mini-corps à deux éléments de caractéristique 2, on considère le champ de Galois des racines de l'équation $X^{p^r} - X = 0$, qui possède p^r éléments. Comme r est aussi grand qu'on veut, on voit bien que \bar{k} ne peut avoir un nombre fini d'éléments.

3. ANNEAU DE JACOBSON

Dans le cas de l'anneau $k[X]$, tout idéal premier P non nul est maximal. Cette propriété tient au fait que l'anneau $k[X]$ est intègre et principal (voir par exemple [10], page 71). Donc, l'idéal premier $P \neq 0$ est égal à l'intersection des idéaux maximaux M qui le contiennent, un tel idéal M étant nécessairement P lui-même. L'idéal nul, qui est premier aussi, est encore l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent d'après le théorème 2. Il en résulte que l'anneau $k[X]$ est un anneau de Jacobson, conformément à la définition suivante:

Définition 2. On appelle *anneau de Jacobson* un anneau intègre A dans lequel tout idéal premier P est égal à l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.