

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVERS ASPECTS DE LA THÉORIE DES IDÉAUX D'UN ANNEAU COMMUTATIF
Autor: Lesieur, L.
Kapitel: 1. Radical de Jacobson d'un anneau
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41528>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. RADICAL DE JACOBSON D'UN ANNEAU

Dans toute la suite, A désigne un anneau commutatif et unitaire. Nous supposons connues la notion d'idéal dans A , d'idéal premier, d'idéal maximal, d'anneau quotient, ainsi que les propriétés suivantes: tout idéal propre¹⁾ est contenu dans un idéal maximal (théorème de Krull); pour que l'idéal P soit premier, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/P soit intègre; pour que l'idéal M soit maximal, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/M soit un corps (pour ces définitions et propriétés, se reporter par exemple à [1], [3] ou [8]).

Définition 1. On appelle *radical de Jacobson* de l'anneau A l'intersection R_J de tous les idéaux maximaux M de A :

$$R_J = \bigcap M,$$

M décrivant l'ensemble de tous les idéaux maximaux.

Les éléments de R_J sont caractérisés par la propriété suivante.

THÉORÈME 1. *Le radical de Jacobson R_J de l'anneau A est un idéal dont tous les éléments x vérifient la propriété.*

(P): $1 - x$ est inversible dans A .

Et c'est le plus grand idéal ayant cette propriété.

En effet, soit $x \in R_J$. Si $1 - x$ n'était pas inversible, l'idéal $A(1 - x)$ constitué par les multiples de $1 - x$ serait propre, donc contenu dans un idéal maximal M . Mais on aurait alors: $x \in M$; $1 - x \in M$, d'où $1 \in M$, ce qui est impossible. Tous les éléments de R_J vérifient donc la propriété (P). D'ailleurs R_J est un idéal comme intersection d'idéaux (maximaux).

Réciproquement, soit I un idéal dont les éléments vérifient la propriété (P). Supposons $I \not\subseteq R_J$. Il existerait un idéal maximal M tel que $I \not\subseteq M$, donc un élément $i \in I$, $i \notin M$. Mais, M étant maximal, on a: $M + Ai = A$, d'où: $1 = m + ai$, $m \in M$, $a \in A$. L'élément ai appartient à I et, d'après la propriété (P), $1 - ai = m$ serait inversible, ce qui est impossible puisque M est propre. On a donc $I \subseteq R_J$.

2. RADICAL DE JACOBSON DE $k[X]$

Soit $A = k[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans un corps commutatif quelconque k . Nous allons démontrer que son radical de Jacobson est nul.

¹⁾ J'appelle idéal propre un idéal différent de A ; il ne contient pas l'élément unité 1 de A .