Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVERS ASPECTS DE LA THÉORIE DES IDÉAUX D'UN ANNEAU COMMUTATIF

Autor: Lesieur, L.

Kapitel: 1. Radical de Jacobson d'un anneau

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41528

1. Radical de Jacobson d'un anneau

Dans toute la suite, A désigne un anneau commutatif et unitaire. Nous supposons connues la notion d'idéal dans A, d'idéal premier, d'idéal maximal, d'anneau quotient, ainsi que les propriétés suivantes: tout idéal propre [1]) est contenu dans un idéal maximal (théorème de Krull); pour que l'idéal P soit premier, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/P soit intègre; pour que l'idéal M soit maximal, il faut et il suffit que l'anneau quotient A/M soit un corps (pour ces définitions et propriétés, se reporter par exemple à [1], [3] ou [8]).

Définition 1. On appelle *radical de Jacobson* de l'anneau A l'intersection R_J de tous les idéaux maximaux M de A:

$$R_I = \cap M,$$

M décrivant l'ensemble de tous les idéaux maximaux.

Les éléments de R_J sont caractérisés par la propriété suivante.

Théorème 1. *Le radical de Jacobson* R_J *de l'anneau* A *est un idéal dont tous les éléments* x *vérifient la propriété.*

(P): 1 − x *est inversible dans* A.

Et c'est le plus grand idéal ayant cette propriété.

En effet, soit $x \in R_J$. Si $1 - x$ n'était pas inversible, l'idéal $A(1 - x)$ constitué par les multiples de $1 - x$ serait propre, donc contenu dans un idéal maximal M. Mais on aurait alors: $x \in M$; $1 - x \in M$, d'où $1 \in M$, ce qui est impossible. Tous les éléments de R_J vérifient donc la propriété (P). D'ailleurs R_J est un idéal comme intersection d'idéaux (maximaux).

Réciproquement, soit I un idéal dont les éléments vérifient la propriété (P). Supposons $I \nsubseteq R_J$. Il existerait un idéal maximal M tel que $I \nsubseteq M$, donc un élément $i \in I$, $i \notin M$. Mais, M étant maximal, on a: $M + Ai = A$, d'où: $1 = m + ai$, $m \in M$, $a \in A$. L'élément ai appartient à I et, d'après la propriété (P), $1 - ai = m$ serait inversible, ce qui est impossible puisque M est propre. On a donc $I \subseteq R_J$.

2. Radical de Jacobson de $k[X]$

Soit $A = k[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans un corps commutatif quelconque k. Nous allons démontrer que son radical de Jacobson est nul.

---

1) J'appelle idéal propre un idéal différent de A; il ne contient pas l'élément unité 1 de A.