

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QUELQUES ASPECTS DE L'CEUVRE DE JACQUES HADAMARD EN GÉOMÉTRIE  
**Autor:** Malliavin, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41527>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# QUELQUES ASPECTS DE L'ŒUVRE DE JACQUES HADAMARD EN GÉOMÉTRIE

par Paul MALLIAVIN

L'attention d'Hadamard fut très vite attirée vers l'étude globale des fonctions. Ses travaux sur le prolongement analytique procèdent évidemment de cette préoccupation; il s'agit de rechercher les propriétés globales d'une fonction analytique, et en particulier ses singularités, à partir d'une définition locale de cette fonction.

L'étude globale des solutions d'une équation différentielle relève du même souci. En 1881, Poincaré avait inauguré la théorie de l'intégration qualitative des équations différentielles. Hadamard continua sur ses traces dans un mémoire paru en 1897: *Sur quelques propriétés des trajectoires de la dynamique*.

L'origine de ce travail peut être trouvée dans la remarque bien connue que, dans le mouvement d'un point pesant sur une sphère, ou bien le point tend vers la position d'équilibre instable, ou bien il traverse une infinité de fois un parallèle horizontal.

Hadamard parvint à définir, dans le cas du mouvement d'un point sur une surface sous l'action d'une fonction de forces  $U$ , une région attractive où le point doit, en général, pénétrer une infinité de fois. La définition de cette région est très simple: on associe à la trajectoire  $x(t)$ , la fonction  $f(t) = U(x(t))$ . Supposant  $U$  bornée, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 3, alors, ou bien  $f(t)$  possède une infinité de maxima, ou bien  $f(t)$ ,  $f'(t)$  et  $f''(t)$  tendent vers une limite (ce qui implique, en général, que  $x(t)$  tend vers une position d'équilibre). Ecrivant que si  $f$  possède un maximum en  $t_0$  alors  $f'(t_0) = 0$  et  $f''(t_0) \leq 0$ , et utilisant les équations du mouvement pour exprimer  $f''(t_0)$  à l'aide de  $x(t_0)$  et  $x'(t_0)$ , Hadamard remarque que les conditions sur  $f$  impliquent qu'au point  $x(t_0)$ , la courbe de niveau de  $U$  tourne sa concavité géodésique dans le sens de la force. Notant par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des points de la surface où cette condition sur  $U$  est satisfaite, alors une trajectoire passera, en général, une infinité de fois dans  $\mathcal{A}$ .

Ce raisonnement peut être généralisé au cas où l'on prend  $f$  de la forme :  $f(t) = V(x(t))$ , où  $V$  est une fonction nouvelle, distincte de la fonction de forces. Par exemple, sur une surface  $S$  à courbure totale partout positive, étant donnée une géodésique fermée  $L$  de  $S$ , Hadamard lui associe la fonction  $V$  définie en tout point de  $S$  par la distance géodésique de ce point à  $L$ ; il démontre ainsi le résultat remarquable que toute géodésique de  $S$  coupe une infinité de fois  $L$ .

Ce résultat qualitatif très remarquable conduisit, l'année suivante, Hadamard à la publication du célèbre mémoire sur les géodésiques d'une surface  $\Sigma$  à courbure partout négative. Étant donné un point  $a$  de  $\Sigma$ , Hadamard considère l'application  $p$  qui associe à un point du plan de coordonnées polaires  $(r, \Theta)$ , le point de  $\Sigma$  situé à la distance  $r$  sur la géodésique d'élément initial  $(a, \Theta)$ . Lorsque  $\Sigma$  est à courbure négative, alors  $p$  est un difféomorphisme local et définit ainsi un revêtement universel de  $\Sigma$ .

Utilisant ce fait, Hadamard montre que dans toute classe d'homotopie de chemin sur  $\Sigma$  d'origine  $a$ , il existe une géodésique et une seule. Il démontre, de même, que, pour tout élément du groupe de Poincaré de  $\Sigma$ , il existe une géodésique fermée qui lui est homotope.

S'inspirant de la parole de Poincaré qui affirme que « les solutions périodiques sont la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place réputée jusqu'ici inabordable », Hadamard utilise l'ensemble des géodésiques fermées pour classer les autres géodésiques en trois classes : celles qui coupent une géodésique fermée, celles qui sont asymptotes à une géodésique fermée; enfin, la troisième classe est constituée par les géodésiques non encore classées. La première classe coïncide avec celle des géodésiques s'éloignant à l'infini. La troisième classe est constituée par des géodésiques qui successivement se rapprochent de très près d'une géodésique fermée puis l'abandonnent pour se rapprocher d'une autre géodésique fermée, etc.

Un fait remarquable est que,  $a$  étant un point donné de  $\Sigma$ , l'ensemble des angles  $\Theta$  tels que  $(a, \Theta)$  soit une valeur initiale d'une géodésique restant à distance finie, est un ensemble parfait totalement discontinu. Les propriétés asymptotiques des géodésiques d'une surface, qui peut être aussi régulière que l'on veut, fait intervenir un concept de la théorie de Cantor dont l'application semblait alors réservée à des fonctions discontinues. C'était sans doute l'un des premiers exemples d'application des idées de Cantor aux mathématiques alors dites classiques.

Ce résultat conduisait Hadamard à penser, par analogie, qu'« un des problèmes fondamentaux de la Mécanique céleste, celui de la stabilité du système solaire, rentre peut-être dans la catégorie des questions mal posées. Si, en effet, on substitue à la recherche de la stabilité du système solaire la question analogue relative aux géodésiques d'une surface à courbure négative, on voit que toute trajectoire stable peut être transformée, par un changement infiniment petit dans les données initiales, dans une trajectoire complètement instable se perdant à l'infini. Or, dans les problèmes astronomiques, les données initiales ne sont jamais connues qu'avec une certaine erreur. Si petite soit-elle, cette erreur pourrait amener une perturbation totale et absolue dans le résultat cherché ».

Il n'est pas besoin de souligner l'intérêt philosophique de cette négation du principe du déterminisme pour les évolutions séculaires. Les travaux ultérieurs sur les systèmes différentiels ont tout à fait confirmé ce point de vue. Signalons aussi le rôle joué dans la théorie ergodique du flot géodésique sur une variété à courbure négative.

Comme on vient de le voir, l'étude des géodésiques sur une surface à courbure négative dépendait du groupe de Poincaré de cette surface. L'attention d'Hadamard fut naturellement attirée vers l'Analysis Situs. Sa leçon d'ouverture au Collège de France, en 1909, fut consacrée à ce sujet. Dans une note parue un an plus tard, Hadamard développe la notion de l'indice de Kronecker et retrouve les théorèmes de Brouwer sur l'invariance du domaine ainsi que le théorème du point fixe. Dans cette note, il suggère le parti que l'on pourrait tirer de tels résultats pour l'étude des systèmes d'équations, prémonition du développement ultérieur considérable de la théorie de l'indice à l'étude des équations fonctionnelles.

Le principe de monodromie sur une variété simplement connexe est utilisé, en 1910, par Hadamard, pour obtenir l'unicité, sur une telle variété, de la géodésique joignant deux points donnés.

Signalons enfin l'étude des surfaces à courbure partout positive pour lesquelles Hadamard démontre qu'une telle surface est simplement connexe et que sa représentation sphérique est univalente, premier résultat en direction des recherches actuelles sur la liaison entre courbure et homologie d'une variété riemannienne.

L'étude des géodésiques devait conduire naturellement Hadamard à la Théorie générale du calcul des variations.

Il propose, en 1906, pour résoudre le problème de recherche de la fonction extrémale, une méthode qui n'est rien d'autre que celle connue actuel-

lement sous le nom de la programmation dynamique: soit  $I(y)$  la fonctionnelle à minimiser; soit  $z$  une fonction quelconque. On cherche une fonction  $y_t$ , dépendant du paramètre  $t$ , c'est-à-dire un point mobile dans l'espace fonctionnel des  $y$ , telle que  $y_0 = z$  et que pour toute valeur de  $t$ , la vitesse de  $y_t$  soit opposée au gradient de la fonctionnelle  $I$ . On montre ensuite, sous des hypothèses convenables, que lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,  $y_t$  tend vers la solution du problème variationnel, dont on démontre en même temps l'unicité. Cette approche était remarquable à cette date; elle géométrisait un problème de calcul des variations et le traitait comme un problème de recherche de minimum dans un espace de dimension finie.

De tels points de vue ont été à l'origine du développement, de 1910 à 1914, du calcul différentiel dans les espaces fonctionnels, recherches par lesquelles a débuté l'analyse fonctionnelle.

Une autre tendance d'Hadamard dans le calcul des variations, est son souci de démontrer la régularité des problèmes considérés. Par exemple, dans l'étude du problème de Dirichlet, il prouve l'existence d'une fonction continue sur la frontière d'un ouvert de  $R^3$ , qui ne peut être prolongée à l'intérieur par une fonction ayant une intégrale de Dirichlet finie, remarque qui peut être considérée comme étant à l'origine de la théorie actuelle des espaces de trace.

Par son *Traité de géométrie*, paru au début du siècle, Hadamard eut enfin une influence considérable sur l'enseignement dans les lycées de la Géométrie élémentaire, en particulier de la Géométrie anallagmatique.

Ce qui frappe dans l'œuvre géométrique d'Hadamard, c'est la diversité des moyens utilisés, empruntés à l'Analyse classique, à la Topologie, ou à l'Analyse fonctionnelle. « Pour inventer, il faut penser à côté, c'est-à-dire qu'il est important pour celui qui veut découvrir de ne pas se confiner à un seul chapitre de la science, mais de se tenir au courant de divers autres. » Cette citation, tirée de l'*Essai* d'Hadamard sur la Psychologie de l'invention dans le domaine mathématique, illustre bien la largeur de vues de son auteur, largeur de vues que l'on retrouve tout particulièrement dans son œuvre en Géométrie.

Citons, pour terminer, une autre phrase du même ouvrage qui décrit bien le rôle d'initiateur qu'Hadamard a su jouer et la générosité avec laquelle il abandonnait à d'autres le développement de ses propres idées: « Après avoir commencé un travail sur un certain ensemble de questions et voyant que plusieurs auteurs s'étaient mis à suivre cette direction, je l'ai souvent abandonnée et j'ai cherché quelque chose d'autre ».