Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Autor: Malgrange, Bernard

Kapitel: I. Propagation des discontinuités

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41526

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

par BERNARD MALGRANGE

En commençant cet aperçu des travaux d'Hadamard, que Poincaré qualifiait à l'époque de « considérables et de premier ordre », disons tout d'abord que nous n'avons pas la prétention d'être complet: on doit à Hadamard, non seulement des travaux célèbres sur la notion de problème correctement posé, le problème de Cauchy, les problèmes mixtes, etc., mais encore quantité d'aperçus, de remarques, à l'occasion des questions les plus variées, et qui ont inspiré tous les spécialistes de la génération suivante, et encore de plus jeunes; je me bornerai à en signaler certaines au passage, que l'état actuel de la théorie peut mettre particulièrement en lumière.

Deux notices sur l'ensemble de son œuvre ont paru récemment: l'une, due à S. Mandelbrojt et L. Schwartz (*Bulletin of the American Mathematical Society*, 1965), l'autre à M. L. Cartwright (*Bibliographical Memoirs of the Fellows of the Royal Society*, 1965); elles ont considérablement facilité mon travail, et je me permettrai de les utiliser librement, en évitant dans quelques cas de les répéter: c'est ainsi que je renvoie à la seconde de ces notices pour une discussion de l'apport propre de Hadamard à la Mécanique des milieux continus, qui sort un peu de mon sujet, et où je ne me reconnais au surplus guère de compétence.

I. *Propagation des discontinuités*

Cette question est au centre du premier ouvrage d'importance d'Hadamard sur notre sujet: les *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique* », [6], 1903, reproduisant avec quelques compléments ses cours de 1898-99 et 1899-1900. Avant qu'elle soit étudiée en général, deux cas importants sont examinés: les équations d'un fluide compressible, (notamment, dans le cas unidimensionnel où Hadamard reprend les travaux de Riemann, Rankine, Hugoniot, en les complétant sur le point de la conservation ou de la non-conservation des tourbillons suivant le type de la discontinuité), et les équations de l'élasticité. Il étend ensuite au cas général une partie des considérations précédentes, d'une manière que nous allons résumer brièvement.

Considérons un système

$$L(U) \equiv \sum A_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \, \partial x_j} + B = 0 \qquad (A_{ij} = A_{ji})$$

où U est une fonction des x_i, à p composantes, et A (resp. B) une matrice de type $p \times p$ (resp. $1 \times p$), fonctions régulières des x_i, de U, et des $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ (nous nous limitons à l'ordre deux, pour simplifier l'exposé).

Etant donné une hypersurface régulière (H) d'équation $H = 0$, peut-il exister deux solutions de notre équation, U_1 et U_2, se raccordant ainsi que leurs dérivées premières sur (H), mais non leurs dérivées secondes?

Il est facile de voir, de voir d'abord que la condition suivante est nécessaire: (H) doit être caractéristique; autrement dit la matrice: $\Sigma A_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j}$ doit être partout de rang $< p$ sur H.

Cette condition n'est cependant pas suffisante, comme le montre l'exemple de l'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$; et une étude complète de la question semble encore aujourd'hui d'une complication inextricable. Hadamard, à la suite des travaux de Goursat et Beudon, se limite essentiellement au cas des caractéristiques simples, dont nous allons dire deux mots; supposons pour simplifier (cas auquel on peut toujours se ramener par changement de variables), que l'on ait $H = x_1$; la matrice précédente se réduit alors à A_{11}; supposons que, en tout point de (H), $\lambda = 0$ soit racine simple de l'équation caractéristique dét $(A_{11} - \lambda I) = 0$; soient Y et Z des vecteurs propres à gauche et à droite de A_{11}, qui dépendront évidemment de $x_2, \ldots, x_n$. On voit d'abord que les données U et $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ sur (H) ne peuvent être quelconques, puisque l'équation $Y L(u) = 0$ ne fait intervenir que U, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, et leurs dérivées tangentielles (U désigne ici U_1 ou U_2). De plus, en posant, sur (H): $\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\right] = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \lambda_1^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2}$, on voit que cette quantité doit être un vecteur propre de A_{11}, donc être de la forme $\lambda(x_2, \ldots, x_n) Z$: ceci est un point essentiel pour les applications; enfin λ doit encore satisfaire à une équation aux dérivées partielles que l'on obtiendra en dérivant l'équation initiale par rapport à x_1, et en multipliant à gauche l'équation obtenue par Y (l'hypothèse de « caractéristique simple » s'exprime ici par une propriété de l'équation finalement obtenue, que nous ne détaillerons pas.) Inversement, dans le cas d'une équation analytique, et de données analytiques vérifiant les « conditions de compatibilités » indiquées, et toujours dans le cas de caractéristiques simples, Hadamard montre, en généralisant des calculs de Darboux, Goursat et Beudon, l'existence de solutions U prenant effectivement sur H les valeurs imposées, ainsi que leurs dérivées d'ordre 1 et 2 (l'analyse peut d'ailleurs se poursuivre à l'ordre supérieur). Hadamard examine aussi un cas de caractéristique multiple intéressant les équations de l'élasticité, où la même analyse s'applique.

On s'étonnera peut-être de ce que nous ayons un peu insisté sur l'analyse précédente, au demeurant fort simple, et due pour l'essentiel à d'autres auteurs que le nôtre; mais, outre l'intérêt qui s'attache aux applications qu'il en fait à la mécanique, Hadamard est amené à ce propos à discuter (sinon à résoudre) un problème étroitement lié au précédent: celui de l'unicité du problème de Cauchy, en distinguant soigneusement, ce qu'on ne faisait pas toujours à l'époque, entre données et solution différentiables ou analytiques; les résultats obtenus à cette époque, qu'il discute soigneusement étaient les suivants: *a)* Le résultat de Darboux-Goursat-Beudon sur la non-unicité dans le cas d'équations à coefficients analytiques et de caractéristiques simples; *b)* Le théorème de Holmgren, sur l'unicité du problème de Couchy dans le cas de données (différentiables) non caractéristiques, pour une équation *linéaire* à coefficients *analytiques.* Hadamard insiste notamment sur l'intérêt qu'il y aurait à éliminer l'hypothèse « analytique » dans ce dernier résultat, ce qui permettrait d'ailleurs d'éliminer aussi l'hypothèse « linéaire ». Comme on le sait, cette question n'a réellement progressé qu'à une époque fort récente: si des contre-exemples de Plis et Cohen montrent que la « conjecture d'Hadamard » est, dans toute sa généralité, fausse, d'importants travaux de Carleman, Calderón, Hörmander, et d'autres auteurs montrent qu'elle est néanmoins exacte dans des cas très étendus; quant à la question *a)*, elle n'a guère progressé depuis, sauf pour les équations à coefficients constants. En passant, tout ceci montre que Hadamard, lorsqu'il avait une motivation pour cela, ne s'intéressait pas seulement aux problèmes « correctement posés », quoique cette dernière question soit un de ses principaux titres de gloire.

Notons enfin que l'analyse précédente ne permet de traiter que les discontinuités « d'ordre supérieur », et non les discontinuités du premier ordre, telles qu'elles se présentent en particulier dans les travaux de Riemann, Rankine et Hugoniot sur les fluides compressibles. Dans ce dernier cas, Hadamard, comme les auteurs de cette époque, ne voit d'autre méthode que celle qui consiste à traiter chaque problème physique séparément, en « reprenant la mise en équations », suivant ses propres termes. Nous savons aujourd'hui que, dans un grand nombre de cas (en particulier celui de Riemann-Rankine-Hugoniot, comme l'ont montré Hopf et Lax), les conditions que l'on obtient ainsi sont précisément celles que l'on trouve en écrivant que les équations sont satisfaites au sens des distributions, ce qui permet une discussion mathématique générale de telles discontinuités: ce n'est pas ici le lieu de l'aborder.

2. *Solution élémentaire des équations du second ordre*

Rappelons rapidement les principes de l'utilisation des solutions élémentaires: soit L un opérateur différentiel linéaire dans R^n, L' son adjoint de Lagrange, et Ω un ouvert de frontière régulière $b\,\Omega$; on a la formule suivante, dite « de Green »

$$\int_{\Omega} [vL(u) - uL'(v)]\, d\,V = \int_{b\Omega} M(u,v)\, d\,S$$

M étant une fonction convenable de u, v et de leurs dérivées. Dans le cas *elliptique*, la méthode consiste à trouver, pour tout point $a \in \Omega$, une fonction v ayant une singularité convenable en a (nous préciserons plus loin), vérifiant en dehors de a: $L'(v) = 0$, et à appliquer la formule précédente à Ω privé d'une boule de centre a et de rayon ε. On a alors, avec des notations évidentes:

$$\int_{\Omega - B_\varepsilon} v\, L(u)\, d\,V = \int_{b\Omega} M(u,v)\, d\,S - \int_{S_\varepsilon} M(u,v)\, d\,S$$

Lorsque v est choisi convenablement, et lorsque u est assez régulier dans Ω, la dernière intégrale tend vers $-\,u(a)$ lorsque ε tend vers 0; on obtient donc à la limite

$$\int_{\Omega} v\, L(u)\, d\,V - \int_{b\Omega} M(u,v)\, d\,S = u(a)$$

formule qui fait connaître $u(a)$ en fonction des valeurs de $L(u)$ dans Ω, et celles de u et certaines de ses dérivées sur $b\,\Omega$ (en langage moderne, cette