Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTION DE PEANO ET DIMENSION DE HAUSDORFF

Autor: Schreiber, J.-P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41556

FONCTION DE PEANO ET DIMENSION DE HAUSDORFF

par J.-P. SCHREIBER

I. La fonction de Peano f applique le segment [0, 1] sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, et satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$; de ce fait, pour tout compact K de [0, 1], on a la relation suivante entre les dimensions de Hausdorff de K et $f(K)$: [1]

$$dim\,\{f(K)\} \leqslant 2\,dim\,\{K\}.$$

Montrons qu'on a en fait égalité. Il suffit de supposer $\dim\{K\} > 0$. Soit $\beta < \dim\{K\}$; il existe (Frostmann: cf. [1]) une mesure μ positive portée par K, telle que pour tout intervalle I de [0, 1]:

$$\mu(I) \leqslant C\,|I|^{\beta}.$$

La mesure image $f(\mu) = v$ est une mesure positive portée par $f(K)$. Montrons que, pour tout carré J de $[0, 1] \times [0, 1]$ on a

$v(J) \leqq c' \cdot |J|^{2\beta}$ ($|J|$ est la longueur du côté de J).

Pour le « carré d'ordre n »:

$$J = \left\{(x, y)\,;\quad \frac{p}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{3^n}\,,\quad \frac{q}{3^n} \leqslant y \leqslant \frac{q+1}{3^n}\right\}$$

on a par la définition de f:

$$v(J) = \mu\{f^{-1}(J)\} \leqslant 9c'\left(\frac{1}{9^n}\right)^{\beta} = c''\,|J|^{2\beta}.$$

Un carré J de côté

$$\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant |J| < \frac{1}{3^n}$$

est recouvert par au plus quatre « carrés d'ordre n »:

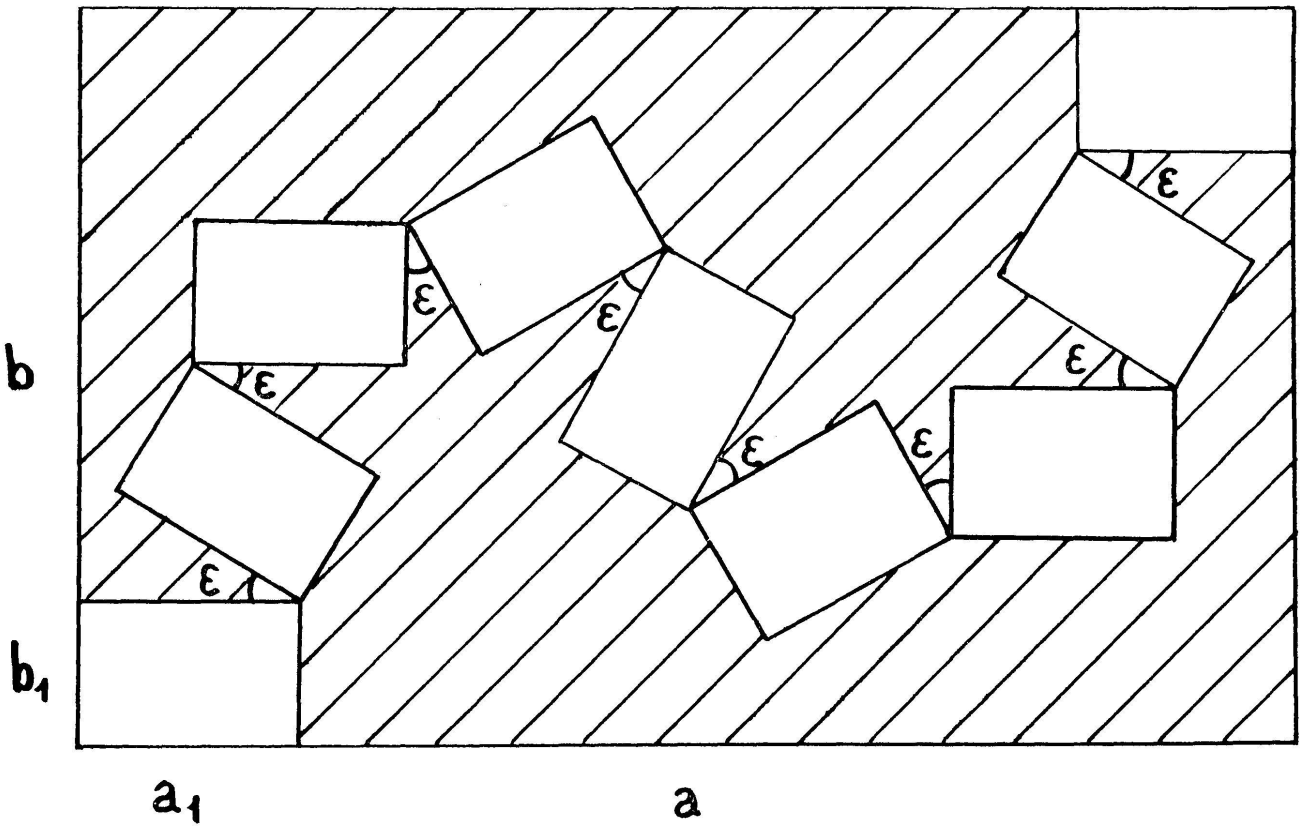
$$v(J) \leqslant 4c''\left(\frac{1}{3^n}\right)^{2\beta} \leqslant C\,|J|^{2\beta}.$$

On en déduit

$$dim\,\{f(K)\} \geqslant 2\beta$$

$$dim\,\{f(K)\} = 2\,dim\,K\,.$$

II. Une légère modification des remarques précédentes permet d'obtenir une application continue du segment [0, 1] dans le plan qui soit *injective* et telle que tout compact de [0, 1] ait une image dont la dimension de Hausdorff soit double. Pour cela nous allons un peu bousculer les carrés servant à construire la courbe de Peano, de façon à « séparer » les points doubles; en fait il est commode de considérer des rectangles et de les subdiviser comme l'indique la figure.



Neuf rectangles de côtés a_1, b_1, faisant entre eux un petit angle ε, s'inscrivent dans un rectangle de côtés a, b:

$$\begin{cases} a = a_1(4 - cos\,2\varepsilon) + b_1(sin\,2\varepsilon + 4\,sin\,\varepsilon) \\ b = a_1(-\,sin\,2\varepsilon + 4\,sin\,\varepsilon) + b_1(4 - cos\,2\varepsilon)\,, \end{cases}$$

soit pour ε tendant vers 0 $\begin{cases} a \sim 3a_1 + 6b_1\,\varepsilon \\ b \sim 3b_1 + 2a_1\,\varepsilon\,. \end{cases}$

Par conséquent, à partir d'un rectangle (a, b) et pour un nombre $\eta > 0$ arbitraire, nous pouvons effectuer une dissection en neuf rectangles (a_1, b_1)

contenus dans le rectangle initial, l'angle ε étant choisi assez petit pour que

$$\begin{cases} 9\,a_1\,b_1 > ab\,(1-\eta) \\ min\left(\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{b_1}{a_1}\right) > min\left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}\right) - \eta\,. \end{cases}$$

Soit alors une suite de nombres η_n, $0 < \eta_n < 1$ telle que

$$(*) \qquad \prod_{n=0}^{\infty} (1-\eta_n) > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

donc aussi
$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n < \frac{1}{2}\,.$$

Partant du carré unité, effectuons une suite de dissections en rectangles, chaque rectangle de la n$^{\text{ième}}$ dissection étant partagé en neuf rectangles de côtés a_{n+1}, b_{n+1} de manière que

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad 9\,a_{n+1}\,b_{n+1} > a_n\,b_n\,(1-\eta_n) \\ \text{(ii)} \quad min\left(\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}, \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) > min\left(\dfrac{a_n}{b_n}, \dfrac{b_n}{a_n}\right) - \eta_n \end{cases}$$

$$a_0 = 1\,, \quad b_0 = 1\,.$$

En faisant correspondre à tout intervalle $\left[\dfrac{k}{9^n}, \dfrac{k+1}{9^n}\right]$ de [0, 1] le $k^{\text{ième}}$ rectangle de la chaîne obtenue à la $n^{\text{ième}}$ dissection, on définit une application continue de [0, 1] dans le carré unité, f, dont l'image est une courbe simple.

Si K est un compact de [0, 1], en conservant les notations du I, on définit une mesure ν sur $f(K)$. Comme les rectangles de la $n^{\text{ième}}$ dissection ont une aire supérieure à $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(9)^n}$ et que le rapport des longueurs des côtés est supérieur à $\dfrac{1}{2}$, le carré:

$$J = \left\{ \{x, y\}\,, \quad \frac{p}{3^n} \leqslant x < \frac{p+1}{3^n}\,, \quad \frac{q}{3^n} \leqslant y < \frac{q+1}{3^n} \right\}$$

rencontre au plus 100 de ces rectangles, donc ν (I) $\leqslant$ 100 $c\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\beta}$. La démonstration s'achève ensuite comme dans la première partie.

RÉFÉRENCE

[1] Kahane, J.-P. et R. Salem. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* Hermann, 1963.

(Reçu le 30 mars 1968)

J.-P. Schreiber
Faculté des Sciences d'Orsay.