une application continue de tout domaine ouvert où il est partout défini, dans **Z**. Il s'en suit que $i(f, x^0)$ est constant dans tout ouvert connexe du plan où il est partout défini.

Si, pour un même système différentiel, en deux points x^0 et y^0 distincts, les index sont différents l'un de l'autre, sur tout chemin continu joignant x^0 et y^0, il existe au moins un point z^0 en lequel l'index n'est pas défini, et par lequel passe donc une solution de période p.

5. *Cas d'un système autonome :* Un tel système différentiel s'écrit sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

où f est indépendant de t. Quel que soit $p > 0$, le système a la période p en t; donc $x^1(t_0, x^0)$ dépend avec la période p de t_0, donc est indépendant de t_0; $c(f, x^0)$ est réduite à un point x^1; si alors l'index est défini, donc si x^1 est distinct de x^0, on a:

$$i(f, x^0) = 0\,.$$

C. Index associé a un système différentiel linéaire

Soit le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{6}$$

où x est une matrice colonne réelle, $A(t)$ une matrice carrée réelle, d'ordre 2, continue sur **R**, de période p.

I. *Rappels et notations*

1. Les solutions sont définies pour tout t, et l'ensemble des solutions a une structure d'espace vectoriel réel de dimension 2.

2. On appelle *solution matricielle fondamentale* de (6), une matrice $X(t)$ réelle d'ordre 2, dont les deux vecteurs colonnes sont des solutions indépendantes de (6). On a alors:

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} Tr\,A(u)\,du\right). \tag{7}$$

3. Soit $X(t, t_0)$ la solution matricielle fondamentale telle que $X(t_0, t_0) = I$, matrice unité. On a alors:

$$x(t, t_0, x^0) = X(t, t_0)\,x^0\,.$$

4. Si $X(t)$ et $Y(t)$ sont deux solutions matricielles fondamentales, il existe C, matrice régulière, indépendante de t, et telle que

$$Y(t) = X(t)C. \tag{8}$$

Soit $X(t, t_0)$ la solution matricielle définie en 3. On a:

$$X(t_1, t_3) = X(t_1, t_2) \cdot X(t_2, t_3) \qquad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

II. *Matrice des* p-*différences*

1. *Définition :* La matrice $Y(t) = X(t+p, t_0)$ est, comme $X(t, t_0)$, une solution matricielle fondamentale. D'après (8), il existe une matrice, indépendante de t, mais dépendant de t_0, notée $C(t_0)$, telle que

$$X(t+p, t_0) = X(t, t_0) \cdot C(t_0). \tag{10}$$

Avec les notations introduites ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} x^1(t_0, x^0) &= x(t_0+p, t_0, x^0) = X(t_0+p, t_0)x^0 \\ &= X(t_0, t_0) \cdot C(t_0)x^0 = C(t_0)x^0. \end{aligned} \tag{11}$$

La courbe des p-différences en x^0 a donc pour équations paramétriques

$$x = C(t_0)x^0 \tag{12}$$

La matrice $C(t_0)$ est appelée *matrice des* p-*différences* du système (6).

2. *Propriétés :*

On sait que $x^1(t_0, x^0)$ dépend périodiquement de t_0, avec la période p; d'après (11), on a donc

$$C(t_0+p) = C(t_0) \qquad t_0 \in \mathbf{R}$$

D'après (5), on a:

$$X(t_0+p, p) = X(t_0, 0)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} C(t_0) &= X(t_0+p, t_0) = X(t_0+p, p) \cdot X(p, 0) \cdot X(0, t_0) \\ &= X(t_0, 0) \cdot C(0) \cdot X^{-1}(t_0, 0). \end{aligned} \tag{13}$$

Donc $C(t_0)$ est semblable à $C(0)$, pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$.

D'après (7):

$$\text{dét } C(t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+p} Tr\, A(u)\, du\right) > 0. \tag{14}$$

III. *Classification des systèmes différentiels linéaires*

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices $A(t)$ réelles, d'ordre 2, continues sur $\mathbf{R}$, de période p. On appelle aussi $\mathscr{A}$ l'ensemble des systèmes différentiels linéaires, d'ordre 2, associés à $A(t)$ de la forme

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x$$

$$\text{où } x \text{ est la matrice colonne } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathscr{A}_i$ ($i = 0, 1, 2$) le sous-ensemble de $\mathscr{A}$ défini de la manière suivante:

Soir $A(t) \in \mathscr{A}$. Si le sous-espace vectoriel des solutions de période p du système différentiel linéaire de matrice $A(t)$, est de dimension i ($i = 0, 1, 2$), on dit que $A(t) \in \mathscr{A}_i$. Les $\mathscr{A}_i$ ainsi définis forment une partition de $\mathscr{A}$.

Notation. L'index associé au système différentiel linéaire de matrice $A(t)$, en x^0, sera noté dans la suite $i(A, x^0)$.

1. *Proposition 1 :* Soit $A(t) \in \mathscr{A}_0$; l'index $i(A, x^0)$ est défini pour tout x^0 non nul, et est indépendant de x^0.

Démonstration : Comme $A(t)$ est dans $\mathscr{A}_0$, la seule trajectoire de période p est $x = 0$. L'index $i(A, x^0)$ est donc défini dans l'ouvert complémentaire de 0 dans le plan; et d'après les propriétés de l'index, $i(\mathrm{A}, x^0)$ est indépendant de x^0 dans ce domaine ouvert connexe.

Notation : Si $A(t)$ est dans $\mathscr{A}_0$, nous noterons $i(A, x^0)$ par $i(A)$.

2. *Proposition 2 :*

a) Soit $A(t) \in \mathscr{A}_0$, $C(t_0)$ sa matrice des p-différences, λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de $C(t_0)$.
Si

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0$$

Alors

$$i(A) = 0\,.$$

b) Soit $A(t) \in \mathscr{A}_1$. Si en x^0, $i(A, x^0)$ est défini, alors

$$i(A, x^0) = 0\,.$$

Démonstration : Soit y_1 un point de $c(A, x^0)$ (courbe des p-différences en x^0 du système différentiel de matrice $A(t)$). D'après (12), il existe $t_1 \in \mathbf{R}$

tel que $y_1 = C(t_1)\, x^0$. Soit y_2 un point de la droite α passant par les points 0 et x^0; il existe alors $\lambda \in R$ tel que $y_2 = \lambda x^0$. Soit $y \in \alpha \cap c(A, x_0)$; on a alors $C(t_1)\, x_0 = \lambda x^0$.

Nécessairement λ est alors une valeur propre de $C(t_1)$, donc aussi de $C(0)$.

a) Soit $A(t) \in \mathscr{A}_0$. La condition

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0$$

entraîne — soit que λ_1 et λ_2 sont complexes conjugués.

La droite α et la courbe $c(A, x^0)$, n'ont pas de point commun; l'index en x^0 est donc nul.

— soit que λ_1 et λ_2 sont réels, tous deux supérieurs à 1 ou tous deux inférieurs à 1. Les points communs à $c(A, x^0)$ et à α, s'ils existent, sont donc tous deux du même côté de x^0 sur α, et l'index en x^0 est nul.

b) Soit $A(t) \in \mathscr{A}_1$. Il existe au moins une solution, non identiquement nulle, de période p; donc il existe des points y^0 distincts de 0 tels que

$$y^0 \in c(A, y^0)$$

et $C(t_0)$ admet donc quel que soit t_0, la valeur propre 1.

Soit λ la seconde valeur propre, et soit x^0 un point en lequel l'index est défini; $c(A, x^0)$ ne contient donc pas x^0, et l'intersection de $c(A, x^0)$ avec α est vide ou réduite au point $y = \lambda x^0$; l'index est alors nul.

La théorie qui suit va permettre de déterminer l'index d'un système différentiel appartenant à $\mathscr{A}_0$, dans le cas où les valeurs propres de la matrice des p-différences sont telles que

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 0 .$$

3. *Groupe $\mathscr{D}$ d'opérateurs sur $\mathscr{A}$.*

Définition : On appelle $\mathscr{D}$ le groupe des matrices $D(t)$, réelles, d'ordre 2, régulières et continûment dérivables sur **R**, de période p, et telles que $D(0) = I$, matrice unité.

Soit alors le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x\,, \qquad A(t) \in \mathscr{A}\,. \tag{15}$$

et considérons la transformation linéaire définie par

$$\xi = D(t)\, x\,, \qquad D(t) \in \mathscr{D}\,. \tag{16}$$

Le système (15) devient:

$$\frac{d\xi}{dt} = \Phi(t)\,\xi\,, \qquad \Phi(t) = \left[\frac{d\,D(t)}{dt} + D(t)\cdot A(t)\right] D^{-1}(t) \in \mathscr{A}\,\cdot \qquad (17)$$

Appelons $D(t)\,*$ l'application de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ définie par:

$$D(t) * A(t) = \Phi(t) = \left[\frac{d\,D(t)}{dt} + D(t)\cdot A(t)\right] D^{-1}(t)\,.$$

Cette application fait de $\mathscr{D}$ un groupe d'opérateurs sur $\mathscr{A}$.

Proposition 3: Les sous-ensembles $\mathscr{A}_i$ de $\mathscr{A}$ $(i = 0, 1, 2)$, sont invariants par $\mathscr{D}$.

En effet, les solutions $x = x(t)$ et $\xi = \xi(t)$ de (15) et (17) liées par $\xi(t) = D(t)\,x(t)$, ont, ou n'ont pas, simultanément la période p. Le groupe d'opérateurs $\mathscr{D}$ induit sur $\mathscr{A}$ une relation d'équivalence:

4. *Relation d'équivalence dans $\mathscr{A}$.*

Définition: Deux matrices $A_i(t)$ $(i = 0, 1)$ de $\mathscr{A}$, ou deux systèmes différentiels de matrice $A_i(t)$, sont dits *équivalents*, s'il existe $D(t) \in \mathscr{D}$ tel que

$$A_1(t) = D(t) * A_0(t)\,.$$

Propriété de cette relation d'équivalence: deux matrices $A_i(t)$ $(i = 0, 1)$ de $\mathscr{A}$ sont équivalentes si, et seulement si leurs matrices des p-différences $C_i(t_0)$ sont égales pour $t_0 = 0$ [3].

5. Soit la matrice constante B de $\mathscr{A}_0$ telle que:

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}; \qquad \mu_1 \in \mathbf{R}\,; \qquad \mu_2 \in \mathbf{R}\,; \qquad \mu_1\,\mu_2 < 0\,. \qquad (18)$$

De la théorie de Floquet [4] on peut déduire: soit $A(t) \in \mathscr{A}_0$, telle que sa matrice des p-différences $C(0)$ ait ses deux valeurs propres λ_1 et λ_2 telles que $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 0$. Alors il existe $B \in \mathscr{A}_0$ de la forme (18) équivalente à $A(t)$; il suffit en effet de choisir $\mu_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2)$ tels que $\lambda_i = \exp \mu_i$.

Les systèmes différentiels qui nous intéressent sont donc équivalents à des systèmes de matrice constante réelle B de la forme (18); dans les paragraphes suivants, nous allons déterminer l'index de systèmes différentiels dans des cas particuliers en partant d'un système de matrice B, puis, grâce à la relation d'homotopie (§ 7), nous pourrons ramener l'étude de l'index à ces cas particuliers.

6. *Etude de l'index dans des cas particuliers.*

a) Soit $p = 2\pi$ pour simplifier l'écriture. et

$$D_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel

$$A_1(t) = D_1(t) * B$$

où B est donnée par (18), admet la solution matricielle

$$X(t, 0) = D_1(t) \cdot exp\,(Bt)$$

et d'après (13), la matrice des 2π-différences de ce système est:

$$C(t_0) = D_1(t_0) \cdot \exp(2\pi B) \cdot D_1^{-1}(t_0).$$

La courbe des 2π-différences $c(A_1, x^0)$, pour $x^0 = (1, 0)$, a pour équation

$$x = C(t_0)\,x^0 = \begin{pmatrix} \mu_1 \cos^2 t_0 + \mu_2 \sin^2 t_0 \\ (\mu_1 - \mu_2) \sin t_0 \cos t_0 \end{pmatrix}$$

c'est une ellipse, contenant $x^0 = (1, 0)$ dans son intérieur, parcourue deux fois si t_0 parcourt $[0, 2\pi]$, dans le sens direct. On a donc $i(A_1) = 2$.

b) Soit encore $p = 2\pi$, et soit $D_k(t) \in \mathscr{D}$, la matrice

$$D_k(t) = D_1^k(t) = \begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Soit $C_k(t_0)$ la matrice des 2π-différences pour le système différentiel de matrice $A_k(t) = D_k(t) * B$, où B donnée par (18). On a:

$$\begin{aligned} C_k(t_0) &= D_k(t_0) \cdot \exp(2\pi B) \cdot D_k^{-1}(t_0) \\ &= D_1(kt_0) \cdot \exp(2\pi B) \cdot D_1^{-1}(kt_0) = C_1(kt_0). \end{aligned}$$

Les courbes des 2π-différences $c(A_1, x^0)$ et $c(A_k, x^0)$ sont donc confondues en tant qu'ensembles; mais si t_0 parcourt $[0,2\pi]$, $c(A_1, x_0)$ est parcourue deux fois, tandis que $c(A_k, x^0)$ est parcourue $2k$ fois ($k \in \mathbf{Z}$). Donc $i(A_k) = 2k$.

7. *Relation d'homotopie:* Soit

$$D_k(t) = \begin{pmatrix} \cos 2k\pi\, t/p & -\sin 2k\pi\, t/p \\ \sin 2k\pi\, t/p & \cos 2k\pi\, t/p \end{pmatrix} \in \mathscr{D}\,; \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Soit $D(t) \in \mathscr{D}$; on peut trouver [5], une famille $D(t, u)$, dépendant continûment de $u \in [0, 1]$, et $k \in \mathbf{Z}$ unique, tels que $D(t, u) \in \mathscr{D}$, $D(t, 0) = D(t)$, $D(t, 1) = D_k(t)$; ceci nous permet de définir l'homotopie de deux éléments de $\mathscr{D}$; on appellera $\mathscr{D}_k \subset \mathscr{D}$ la classe d'homotopie de $D_k(t)$; le sous-ensemble $\mathscr{D}_0$ est un sous-groupe de $\mathscr{D}$, qui induit donc sur $\mathscr{A}$ une relation d'équivalence:

Définition : On dit que deux matrices $A_i(t)$ $(i = 0, 1)$ de $\mathscr{A}$ sont *homotopes* s'il existe $D(t) \in D_0$, telle que $A_1(t) = D(t) * A_0(t)$.

Proposition 4: Si deux matrices $A_i(t) \in A_0$ $(i = 0, 1)$ sont homotopes, leurs courbes des p-différences $c(A_i, x^0)$ sont homotopes dans $\mathbf{R}^2 - \{ x^0 \}$, quel que soit x^0 non nul.

Corollaire : Si $A_i(t) \in \mathscr{A}_0$ $(i = 0, 1)$ sont homotopes, les index associés sont égaux.

Démonstration de la proposition : Soit $D(t) \in D_0$ telle que

$$A_1(t) = D(t) * A_0(t)$$

D (t) étant homotope à I dans $\mathscr{D}$, il existe une application continue $u \to D_u(t)$, de $[0, 1]$ dans $\mathscr{D}$ telle que $D_0(t) = I$; $D_1(t) = D(t)$. Soit $A_u(t) = D_u(t) * A_0(t)$. Soit $C_u(t_0)$ et $c(A_u, x^0)$, la matrice et la courbe des p-différences en x^0 du système différentiel de matrice $A_u(t)$.

D'après la proposition 3, $A_u(t)$ est dans $\mathscr{A}_0$ pour tout u, et donc la courbe fermée $c(A_u, x^0)$ ne contient x^0 pour aucun u. Comme $C_u(t_0)$ dépend continûment de u, la proposition est démontrée.

8. Soit alors $A(t) \in \mathscr{A}_0$ telle que les valeurs propres λ_1 et λ_2 de sa matrice des p-différences vérifient:

$$(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) < 0 . \tag{20}$$

D'après 5, il existe $B \in \mathscr{A}_0$, de la forme (18) si on se place dans une base convenable, et équivalente à $A(t)$. Donc il existe $D(t) \in \mathscr{D}$ telle que

$$A(t) = D(t) * B$$

Soit $\mathscr{D}_k$ la classe d'homotopie de $D(t)$, $D_k(t)$ la matrice de cette classe donnée par (19). Soit

$$A_k(t) = D_k(t) * B .$$

Comme $D(t) . D_k^{-1}(t)$ est dans $\mathscr{D}_0$, $A(t)$ et $A_k(t)$ sont homotopes et ont donc même index. Il s'en suit que $i(A) = 2k$.

Théorème : Soit $A(t) \in A_0$ telle que la relation (20) soit réalisée. Soit $B \in \mathscr{A}_0$, matrice constante et $D(t) \in \mathscr{D}$ tellė que

$$A(t) = D(t) * B .$$

On a alors:

$$i(A) = 2k$$

où $k \in \mathbf{Z}$ est tel que $\mathscr{D}_k$ est la classe d'homotopie de $D(t)$.

RÉFÉRENCES

[1] SEIFERT, H. Closed integral curves in 3-space, and isotopic two-dimensional deformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), pp. 287-302.

[2] ALEXANDROFF, P. et H. HOPF. *Topologie.* Verlag von Julius Springer, Berlin (1935), p. 419.

[3] PONTRYAGIN, L. S. *Ordinary Differential Equations.* Pergamon Press, New York (1962).

[4] LEFSCHETZ, S. *Differential Equations: Geometric Theory* Interscience. New York (1963), pp. 73-75.

[5] EPSTEIN, I. J. On Systems of Linear Differential Equations with Periodic Coefficients: Algebraic and Topological Aspects. *J. Diff. Equations*, 1 (1965), pp. 206-221.

(Reçu le 22 février 1968)

Bruno V. Schmitt
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
67 Strasbourg.