Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INDEX ASSOCIÉ A UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE,

PÉRIODIQUE, DU SECOND ORDRE

Autor: Schmitt, Bruno V.

Kapitel: C. Index associé aun système différentiel linéaire

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41555

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

une application continue de tout domaine ouvert où il est partout défini, dans \mathbb{Z} . Il s'en suit que $i(f, x^0)$ est constant dans tout ouvert connexe du plan où il est partout défini.

Si, pour un même système différentiel, en deux points x^0 et y^0 distincts, les index sont différents l'un de l'autre, sur tout chemin continu joignant x^0 et y^0 , il existe au moins un point z^0 en lequel l'index n'est pas défini, et par lequel passe donc une solution de période p.

5. Cas d'un système autonome: Un tel système différentiel s'écrit sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

où f est indépendant de t. Quel que soit p>0, le système a la période p en t; donc x^1 (t_0 , x^0) dépend avec la période p de t_0 , donc est indépendant de t_0 ; c (f, x^0) est réduite à un point x^1 ; si alors l'index est défini, donc si x^1 est distinct de x^0 , on a:

$$i(f, x^0) = 0.$$

C. Index associé a un système différentiel linéaire

Soit le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{6}$$

où x est une matrice colonne réelle, A(t) une matrice carrée réelle, d'ordre 2, continue sur \mathbf{R} , de période p.

I. Rappels et notations

- 1. Les solutions sont définies pour tout t, et l'ensemble des solutions a une structure d'espace vectoriel réel de dimension 2.
- 2. On appelle solution matricielle fondamentale de (6), une matrice X(t) réelle d'ordre 2, dont les deux vecteurs colonnes sont des solutions indépendantes de (6). On a alors:

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t Tr A(u) du \right). \tag{7}$$

3. Soit $X(t, t_0)$ la solution matricielle fondamentale telle que $X(t_0, t_0) = I$, matrice unité. On a alors:

$$x(t, t_0, x^0) = X(t, t_0) x^0$$
.

4. Si X(t) et Y(t) sont deux solutions matricielles fondamentales, il existe C, matrice régulière, indépendante de t, et telle que

$$Y(t) = X(t) C. (8)$$

Soit $X(t, t_0)$ la solution matricielle définie en 3. On a:

$$X(t_1, t_3) = X(t_1, t_2) \cdot X(t_2, t_3) \qquad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R} . \tag{9}$$

II. Matrice des p-différences

1. Définition: La matrice $Y(t) = X(t+p, t_0)$ est, comme $X(t, t_0)$, une solution matricielle fondamentale. D'après (8), il existe une matrice, indépendante de t, mais dépendant de t_0 , notée $C(t_0)$, telle que

$$X(t+p,t_0) = X(t,t_0) \cdot C(t_0). \tag{10}$$

Avec les notations introduites ci-dessus, on a

$$x^{1}(t_{0}, x^{0}) = x(t_{0} + p, t_{0}, x^{0}) = X(t_{0} + p, t_{0}) x^{0}$$
$$= X(t_{0}, t_{0}) \cdot C(t_{0}) x^{0} = C(t_{0}) x^{0}.$$
(11)

La courbe des p-différences en x^0 a donc pour équations paramétriques

$$x = C(t_0)x^0 (12)$$

La matrice $C(t_0)$ est appelée matrice des p-différences du système (6).

2. Propriétés:

On sait que x^1 (t_0 , x^0) dépend périodiquement de t_0 , avec la période p; d'après (11), on a donc

$$C(t_0 + p) = C(t_0) \qquad t_0 \in \mathbf{R}$$

D'après (5), on a:

$$X(t_0 + p, p) = X(t_0, 0)$$

On en déduit

$$C(t_0) = X(t_0 + p, t_0) = X(t_0 + p, p) \cdot X(p, 0) \cdot X(0, t_0)$$

= $X(t_0, 0) \cdot C(0) \cdot X^{-1}(t_0, 0)$. (13)

Donc $C(t_0)$ est semblable à C(0), pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$. D'après (7):

$$\det C(t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+p} Tr \, A(u) \, du\right) > 0. \tag{14}$$

III. Classification des systèmes différentiels linéaires

Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices A(t) réelles, d'ordre 2, continues sur \mathbf{R} , de période p. On appelle aussi \mathcal{A} l'ensemble des systèmes différentiels linéaires, d'ordre 2, associés à A(t) de la forme

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

où
$$x$$
 est la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Soit \mathcal{A}_i (i=0,1,2) le sous-ensemble de \mathcal{A} défini de la manière suivante: Soir $A(t) \in \mathcal{A}$. Si le sous-espace vectoriel des solutions de période p du système différentiel linéaire de matrice A(t), est de dimension i (i=0,1,2), on dit que $A(t) \in \mathcal{A}_i$. Les \mathcal{A}_i ainsi définis forment une partition de \mathcal{A} .

Notation. L'index associé au système différentiel linéaire de matrice A(t), en x^0 , sera noté dans la suite $i(A, x^0)$.

1. Proposition 1 : Soit $A(t) \in \mathcal{A}_0$; l'index $i(A, x^0)$ est défini pour tout x^0 non nul, et est indépendant de x^0 .

Démonstration: Comme A(t) est dans \mathcal{A}_0 , la seule trajectoire de période p est x=0. L'index $i(A,x^0)$ est donc défini dans l'ouvert complémentaire de 0 dans le plan; et d'après les propriétés de l'index, $i(A,x^0)$ est indépendant de x^0 dans ce domaine ouvert connexe.

Notation: Si A(t) est dans \mathcal{A}_0 , nous noterons $i(A, x^0)$ par i(A).

- 2. Proposition 2:
- a) Soit $A(t) \in \mathcal{A}_0$, $C(t_0)$ sa matrice des p-différences, λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de $C(t_0)$. Si

$$(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$$

Alors

$$i(A) = 0.$$

b) Soit $A(t) \in \mathcal{A}_1$. Si en x^0 , $i(A, x^0)$ est défini, alors

$$i(A,x^0)=0.$$

Démonstration: Soit y_1 un point de $c(A, x^0)$ (courbe des p-différences en x^0 du système différentiel de matrice A(t)). D'après (12), il existe $t_1 \in \mathbf{R}$

tel que $y_1 = C(t_1) x^0$. Soit y_2 un point de la droite α passant par les points 0 et x^0 ; il existe alors $\lambda \in R$ tel que $y_2 = \lambda x^0$. Soit $y \in \alpha \cap c(A, x_0)$; on a alors $C(t_1) x_0 = \lambda x^0$.

Nécessairement λ est alors une valeur propre de $C(t_1)$, donc aussi de C(0).

a) Soit $A(t) \in \mathcal{A}_0$. La condition

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0$$

entraîne — soit que λ_1 et λ_2 sont complexes conjugués.

La droite α et la courbe $c(A, x^0)$, n'ont pas de point commun; l'index en x^0 est donc nul.

- soit que λ_1 et λ_2 sont réels, tous deux supérieurs à 1 ou tous deux inférieurs à 1. Les points communs à $c(A, x^0)$ et à α , s'ils existent, sont donc tous deux du même côté de x^0 sur α , et l'index en x^0 est nul.
- b) Soit $A(t) \in \mathcal{A}_1$. Il existe au moins une solution, non identiquement nulle, de période p; donc il existe des points y^0 distincts de 0 tels que

$$y^0 \in c\left(A, y^0\right)$$

et $C(t_0)$ admet donc quel que soit t_0 , la valeur propre 1.

Soit λ la seconde valeur propre, et soit x^0 un point en lequel l'index est défini; $c(A, x^0)$ ne contient donc pas x^0 , et l'intersection de $c(A, x^0)$ avec α est vide ou réduite au point $y = \lambda x^0$; l'index est alors nul.

La théorie qui suit va permettre de déterminer l'index d'un système différentiel appartenant à \mathcal{A}_0 , dans le cas où les valeurs propres de la matrice des p-différences sont telles que

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)<0.$$

3. Groupe \mathcal{D} d'opérateurs sur \mathcal{A} .

Définition: On appelle \mathcal{D} le groupe des matrices D(t), réelles, d'ordre 2, régulières et continûment dérivables sur \mathbf{R} , de période p, et telles que D(0) = I, matrice unité.

Soit alors le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad A(t) \in \mathscr{A}. \tag{15}$$

et considérons la transformation linéaire définie par

$$\xi = D(t)x, \quad D(t) \in \mathcal{D}.$$
 (16)

Le système (15) devient:

$$\frac{d\xi}{dt} = \Phi(t)\,\xi\,,\qquad \Phi(t) = \left[\frac{d\,D(t)}{dt} + D(t)\cdot A(t)\right]D^{-1}(t)\in\mathscr{A}\,\cdot\quad(17)$$

Appelons D(t) * l'application de \mathcal{A} dans \mathcal{A} définie par:

$$D(t) * A(t) = \Phi(t) = \left\lceil \frac{dD(t)}{dt} + D(t) \cdot A(t) \right\rceil D^{-1}(t).$$

Cette application fait de \mathcal{D} un groupe d'opérateurs sur \mathcal{A} .

Proposition 3: Les sous-ensembles \mathcal{A}_i de \mathcal{A} (i=0,1,2), sont invariants par \mathcal{D} .

En effet, les solutions x = x(t) et $\xi = \xi(t)$ de (15) et (17) liées par $\xi(t) = D(t)x(t)$, ont, ou n'ont pas, simultanément la période p. Le groupe d'opérateurs \mathcal{D} induit sur \mathcal{A} une relation d'équivalence:

4. Relation d'équivalence dans A.

Définition: Deux matrices $A_i(t)$ (i = 0, 1) de \mathscr{A} , ou deux systèmes différentiels de matrice $A_i(t)$, sont dits équivalents, s'il existe $D(t) \in \mathscr{D}$ tel que

$$A_1(t) = D(t) * A_0(t)$$
.

Propriété de cette relation d'équivalence: deux matrices $A_i(t)$ (i = 0, 1) de \mathcal{A} sont équivalentes si, et seulement si leurs matrices des p-différences $C_i(t_0)$ sont égales pour $t_0 = 0$ [3].

5. Soit la matrice constante B de \mathcal{A}_0 telle que:

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}; \quad \mu_1 \in \mathbf{R}; \quad \mu_2 \in \mathbf{R}; \quad \mu_1 \,\mu_2 < 0.$$
 (18)

De la théorie de Floquet [4] on peut déduire: soit $A(t) \in \mathcal{A}_0$, telle que sa matrice des p-différences C(0) ait ses deux valeurs propres λ_1 et λ_2 telles que $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)<0$. Alors il existe $B \in \mathcal{A}_0$ de la forme (18) équivalente à A(t); il suffit en effet de choisir $\mu_i \in \mathbf{R}$ (i=1,2) tels que $\lambda_i = \exp \mu_i$.

Les systèmes différentiels qui nous intéressent sont donc équivalents à des systèmes de matrice constante réelle B de la forme (18); dans les paragraphes suivants, nous allons déterminer l'index de systèmes différentiels dans des cas particuliers en partant d'un système de matrice B, puis, grâce à la relation d'homotopie (§ 7), nous pourrons ramener l'étude de l'index à ces cas particuliers.

- 6. Etude de l'index dans des cas particuliers.
- a) Soit $p = 2\pi$ pour simplifier l'écriture. et

$$D_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel

$$A_1(t) = D_1(t) * B$$

où B est donnée par (18), admet la solution matricielle

$$X(t,0) = D_1(t) \cdot exp(Bt)$$

et d'après (13), la matrice des 2π -différences de ce système est:

$$C(t_0) = D_1(t_0) \cdot \exp(2\pi B) \cdot D_1^{-1}(t_0)$$
.

La courbe des 2π -différences $c(A_1, x^0)$, pour $x^0 = (1, 0)$, a pour équation

$$x = C(t_0) x^0 = \begin{pmatrix} \mu_1 \cos^2 t_0 + \mu_2 \sin^2 t_0 \\ (\mu_1 - \mu_2) \sin t_0 \cos t_0 \end{pmatrix}$$

c'est une ellipse, contenant $x^0 = (1, 0)$ dans son intérieur, parcourue deux fois si t_0 parcourt $[0, 2\pi]$, dans le sens direct. On a donc $i(A_1) = 2$.

b) Soit encore $p = 2\pi$, et soit $D_k(t) \in \mathcal{D}$, la matrice

$$D_k(t) = D_1^k(t) = \begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Soit $C_k(t_0)$ la matrice des 2π -différences pour le système différentiel de matrice $A_k(t) = D_k(t) * B$, où B donnée par (18). On a:

$$C_k(t_0) = D_k(t_0) \cdot \exp(2\pi B) \cdot D_k^{-1}(t_0)$$

= $D_1(kt_0) \cdot \exp(2\pi B) \cdot D_1^{-1}(kt_0) = C_1(kt_0)$.

Les courbes des 2π -différences $c(A_1, x^0)$ et $c(A_k, x^0)$ sont donc confondues en tant qu'ensembles; mais si t_0 parcourt $[0,2\pi]$, $c(A_1, x_0)$ est parcourue deux fois, tandis que $c(A_k, x^0)$ est parcourue 2k fois $(k \in \mathbb{Z})$. Donc $i(A_k) = 2k$.

7. Relation d'homotopie: Soit

$$D_k(t) = \begin{pmatrix} \cos 2k \pi t/p & -\sin 2k \pi t/p \\ \sin 2k \pi t/p & \cos 2k \pi t/p \end{pmatrix} \in \mathcal{D}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Soit $D(t) \in \mathcal{D}$; on peut trouver [5], une famille D(t, u), dépendant continûment de $u \in [0, 1]$, et $k \in \mathbb{Z}$ unique, tels que $D(t, u) \in \mathcal{D}$, D(t, 0) = D(t), $D(t, 1) = D_k(t)$; ceci nous permet de définir l'homotopie de deux éléments de \mathcal{D} ; on appellera $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$ la classe d'homotopie de $D_k(t)$; le sous-ensemble \mathcal{D}_0 est un sous-groupe de \mathcal{D} , qui induit donc sur \mathcal{A} une relation d'équivalence:

Définition: On dit que deux matrices $A_i(t)$ (i = 0, 1) de \mathscr{A} sont homotopes s'il existe $D(t) \in D_0$, telle que $A_1(t) = D(t) * A_0(t)$.

Proposition 4: Si deux matrices $A_i(t) \in A_0$ (i = 0, 1) sont homotopes, leurs courbes des p-différences $c(A_i, x^0)$ sont homotopes dans $\mathbb{R}^2 - \{x^0\}$, quel que soit x^0 non nul.

Corollaire: Si $A_i(t) \in \mathcal{A}_0$ (i = 0, 1) sont homotopes, les index associés sont égaux.

Démonstration de la proposition : Soit $D(t) \in D_0$ telle que

$$A_1(t) = D(t) * A_0(t)$$

D (t) étant homotope à I dans \mathscr{D} , il existe une application continue $u \to D_u(t)$, de [0, 1] dans \mathscr{D} telle que $D_0(t) = I$; $D_1(t) = D(t)$. Soit $A_u(t) = D_u(t) * A_0(t)$. Soit $C_u(t_0)$ et $c(A_u, x^0)$, la matrice et la courbe des p-différences en x^0 du système différentiel de matrice $A_u(t)$.

D'après la proposition 3, $A_u(t)$ est dans \mathcal{A}_0 pour tout u, et donc la courbe fermée $c(A_u, x^0)$ ne contient x^0 pour aucun u. Comme $C_u(t_0)$ dépend continûment de u, la proposition est démontrée.

8. Soit alors $A(t) \in \mathcal{A}_0$ telle que les valeurs propres λ_1 et λ_2 de sa matrice des p-différences vérifient:

$$(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) < 0. (20)$$

D'après 5, il existe $B \in \mathcal{A}_0$, de la forme (18) si on se place dans une base convenable, et équivalente à A(t). Donc il existe $D(t) \in \mathcal{D}$ telle que

$$A(t) = D(t) * B$$

Soit \mathcal{D}_k la classe d'homotopie de D(t), $D_k(t)$ la matrice de cette classe donnée par (19). Soit

$$A_k(t) = D_k(t) * B.$$

Comme D(t). $D_k^{-1}(t)$ est dans \mathcal{D}_0 , A(t) et $A_k(t)$ sont homotopes et ont donc même index. Il s'en suit que i(A) = 2k.

Théorème: Soit $A(t) \in A_0$ telle que la relation (20) soit réalisée. Soit $B \in \mathcal{A}_0$, matrice constante et $D(t) \in \mathcal{D}$ telle que

$$A(t) = D(t) * B.$$

On a alors:

$$i(A) = 2k$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est tel que \mathcal{D}_k est la classe d'homotopie de D(t).

RÉFÉRENCES

- [1] Seifert, H. Closed integral curves in 3-space, and isotopic two-dimensional deformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), pp. 287-302.
- [2] ALEXANDROFF, P. et H. HOPF. *Topologie*. Verlag von Julius Springer, Berlin (1935), p. 419.
- [3] Pontryagin, L. S. Ordinary Differential Equations. Pergamon Press, New York (1962).
- [4] Lefschetz, S. Differential Equations: Geometric Theory Interscience. New York (1963), pp. 73-75.
- [5] Epstein, I. J. On Systems of Linear Differential Equations with Periodic Coefficients: Algebraic and Topological Aspects. J. Diff. Equations, 1 (1965), pp. 206-221.

(Reçu le 22 février 1968)

Bruno V. Schmitt

Institut de Recherche Mathématique Avancée Laboratoire associé au C.N.R.S. Rue René Descartes 67 Strasbourg.