Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INDEX ASSOCIÉ A UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE, PÉRIODIQUE, DU SECOND ORDRE

Autor: Schmitt, Bruno V.

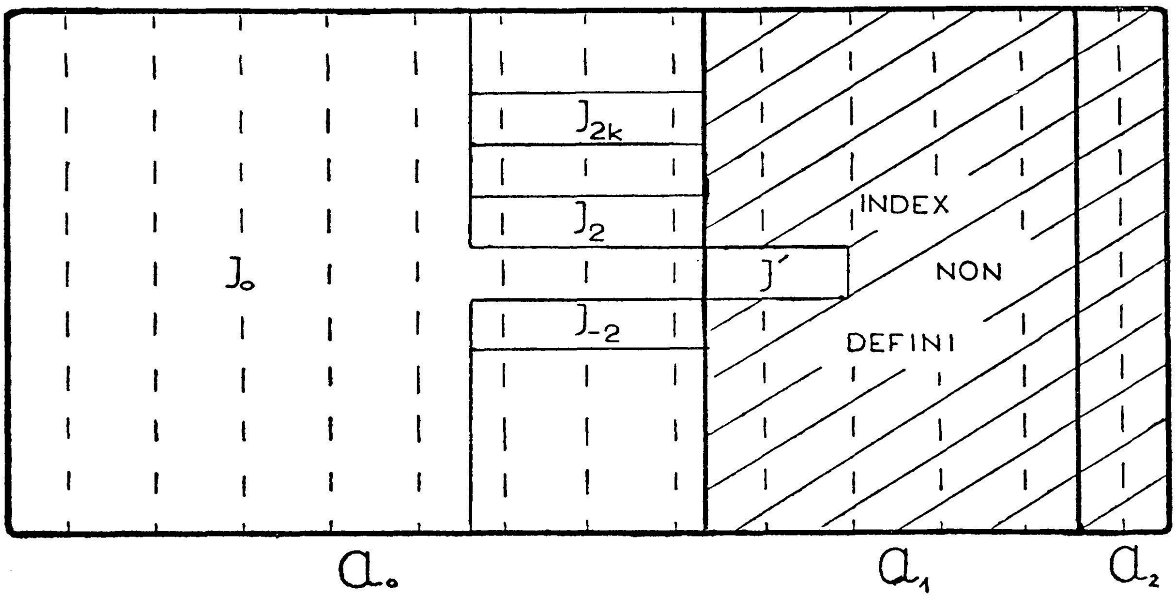
Kapitel: B. DÉFINITION DE L'INDEX $i(f,x^0)$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41555

2° si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 0$, et si en x^0 l'index est défini, cet index est nul (III 2°) (ensemble J' du tableau ci-dessous).

On pourra remarquer que l'index d'un système linéaire, en un point x^0 où il est défini, est dans tous les cas pair.

Ces résultats ont été détaillés dans le tableau ci-dèssous: il représente l'ensemble $\mathscr{A}$ des systèmes différentiels périodiques linéaires, d'ordre 2, décomposé en les sous-ensembles $\mathscr{A}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ définis dans C. III. On note par $\mathscr{J}_{2k}$ l'ensemble des systèmes différentiels d'index $2k$. Les classes d'équivalence de systèmes (deux systèmes différentiels étant équivalents (C. III 4°) s'il existe un changement de variable linéaire et périodique $y = D(t)x$ permettant de transformer l'un en l'autre), ont été représentés par des tirets. On remarquera que certaines classes sont en entier dans $\mathscr{J}_0$ (cas où $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0$), donc que toute transformation linéaire sur un système de cette classe laisse l'index invariant et nul. Au contraire, si une classe rencontre un $\mathscr{J}_{2k}$ $(k \neq 0)$ (cas où $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 0$), elle les rencontre tous: étant donné un système différentiel dans une telle classe, tout index pair peut être obtenu à l'aide d'une transformation linéaire périodique adéquate.



B. Définition de l'index $i(f, x^0)$

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases} \tag{3}$$

sous forme vectorielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{4}$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions réelles de t et x, périodiques en t, de période p. On suppose que le système (3) satisfait la condition de Lipschitz et la condition restrictive que toute trajectoire est définie pour tout t. On note par $x(t, t_0, x^0)$ la trajectoire de (3) telle que $x(t_0, t_0, x^0) = x^0$.

1. Comme $f(t, x)$ admet la période p relativement à t, on a, pour tout t:

$$x(t, t_0, x^0) = x(t+p, t_0+p, x^0) . \tag{5}$$

2. On considère dans le plan des x, le point x^1, dépendant de t_0 et x^0, noté $x^1(t_0, x^0)$, défini par:

$$x^1(t_0, x^0) = x(t_0+p, t_0, x^0) .$$

On obtient alors, en considérant (5):

$$x^1(t_0+p, x^0) = x^1(t_0, x^0) \qquad t_0 \in \mathbf{R}$$

il s'en suit que, pour x^0 fixé, $x^1(t_0, x^0)$ dépend périodiquement de t_0, avec la période p; le point $x^1(t_0, x^0)$ décrit donc dans le plan des x, lorsque t_0 parcourt $[o, p]$, une courbe fermée, continue (car les solutions dépendent continûment de la valeur initiale t_0); nous appelons dans la suite cette courbe *courbe des* p-*différences en* x° du système (3) notée $c(f, x^0)$.

3. *Définition de l'index en* x^0 *:* soit x^0 un point du plan, n'appartenant pas à $c(f, x^0)$. On appelle alors *index du système (3)* en x^0, noté $i(f, x^0)$, le nombre

$$i(f, x^0) = \mathscr{V}\left[c(f, x^0), x^0\right] \in \mathbf{Z}$$

index (ou Verschlingungszahl) de $c(f, x^0)$ relativement à x^0 [2].

4. *Propriétés de l'index :*

Il y a équivalence entre les trois propositions:

« Il existe t_1 tel que $x(t, t_1, x^0)$ a la période p. »

« La courbe $c(f, x^0)$ passe par x^0. »

« Le nombre $i(f, x^0)$ n'est pas défini. »

La solution $x(t, t_0, x^0)$ dépend continûment de (t_0, x^0), ainsi que le point $x^1(t_0, x^0)$; donc la famille des courbes $c(f, x^0)$, paramétrées par t_0, dépend continûment de (t_0, x^0); et le nombre $i(f, x^0)$ est, pour f donnée, une application continue de tout domaine ouvert où il est partout défini, dans $\mathbf{Z}$. Il s'en suit que $i(f, x^0)$ est constant dans tout ouvert connexe du plan où il est partout défini.

Si, pour un même système différentiel, en deux points x^0 et y^0 distincts, les index sont différents l'un de l'autre, sur tout chemin continu joignant x^0 et y^0, il existe au moins un point z^0 en lequel l'index n'est pas défini, et par lequel passe donc une solution de période p.

5. *Cas d'un système autonome :* Un tel système différentiel s'écrit sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

où f est indépendant de t. Quel que soit $p > 0$, le système a la période p en t; donc $x^1(t_0, x^0)$ dépend avec la période p de t_0, donc est indépendant de t_0; $c(f, x^0)$ est réduite à un point x^1; si alors l'index est défini, donc si x^1 est distinct de x^0, on a:

$$i(f, x^0) = 0 .$$

C. Index associé a un système différentiel linéaire

Soit le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{6}$$

où x est une matrice colonne réelle, $A(t)$ une matrice carrée réelle, d'ordre 2, continue sur $\mathbf{R}$, de période p.

I. *Rappels et notations*

1. Les solutions sont définies pour tout t, et l'ensemble des solutions a une structure d'espace vectoriel réel de dimension 2.

2. On appelle *solution matricielle fondamentale* de (6), une matrice $X(t)$ réelle d'ordre 2, dont les deux vecteurs colonnes sont des solutions indépendantes de (6). On a alors:

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} Tr\, A(u)\, du\right) . \tag{7}$$

3. Soit $X(t, t_0)$ la solution matricielle fondamentale telle que $X(t_0, t_0) = I$, matrice unité. On a alors:

$$x(t, t_0, x^0) = X(t, t_0)\, x^0 .$$