

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INDEX ASSOCIÉ A UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE, PÉRIODIQUE, DU SECOND ORDRE  
**Autor:** Schmitt, Bruno V.  
**Kapitel:** A. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41555>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# INDEX ASSOCIÉ A UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE, PÉRIODIQUE, DU SECOND ORDRE

par Bruno V. SCHMITT

## A. INTRODUCTION

Nous reprenons ici, sous le nom d'index, une notion qui a été introduite d'une autre manière, sous le nom de « rotation number », par H. Seifert [1].

Etant donné un système différentiel d'ordre 2, à coefficients périodiques de période  $p$ , de la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

à tout point  $x^0$  du plan, nous associons un index  $i(x^0) \in \mathbf{Z}$  qui a les propriétés suivantes:

1. L'index  $i(x^0)$  est défini si et seulement s'il ne passe pas de solution de période  $p$  par le point  $x^0$ .

2. Si en  $x^0$  et en  $y^0$  distincts, les index sont différents, alors sur tout chemin continu joignant  $x^0$  à  $y^0$ , il existe un point  $z^0$  par lequel passe au moins une solution de période  $p$ .

Dans cet article nous limitons notre étude aux systèmes différentiels périodiques linéaires. Les résultats peuvent être résumés ainsi: soit

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (2)$$

le système différentiel linéaire, réel, d'ordre 2, de période  $p$ . Soit  $x(t, t_0, x^0)$  la trajectoire de (2) telle que  $x(t_0, t_0, x^0) = x^0$ . Soit  $\mathcal{C}$  l'application linéaire, du plan dans le plan, de matrice  $C(0)$ , (C. II 1°), définie par  $\mathcal{C}(x^0) = x(p, 0, x^0)$ . Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $\mathcal{C}$ .

1° si  $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \neq 0$ , la seule trajectoire de période  $p$  est  $x(t) = 0$ , l'index du système (2) est défini en tout point  $x^0$  distinct de 0, et il est indépendant de ce point. L'index est alors un nombre ne dépendant que du système (2).

a) si  $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$  l'index du système est nul (C. III 2°)

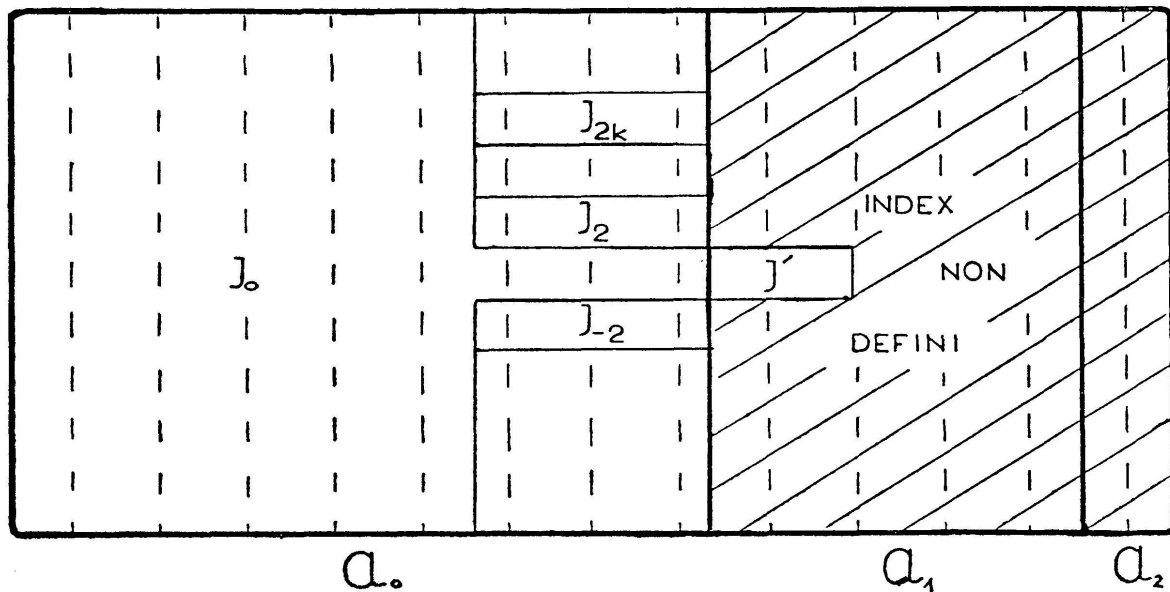
b) si  $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) < 0$  l'index du système est  $2k$  (C. III 8°)

où  $k \in \mathbf{Z}$  est attaché à la classe d'homotopie (C. III 7°) du système (2).

2° si  $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) = 0$ , et si en  $x^0$  l'index est défini, cet index est nul (III 2°) (ensemble  $J'$  du tableau ci-dessous).

On pourra remarquer que l'index d'un système linéaire, en un point  $x^0$  où il est défini, est dans tous les cas pair.

Ces résultats ont été détaillés dans le tableau ci-dessous: il représente l'ensemble  $\mathcal{A}$  des systèmes différentiels périodiques linéaires, d'ordre 2, décomposé en les sous-ensembles  $\mathcal{A}_i (i = 0, 1, 2)$  définis dans C. III. On note par  $\mathcal{J}_{2k}$  l'ensemble des systèmes différentiels d'index  $2k$ . Les classes d'équivalence de systèmes (deux systèmes différentiels étant équivalents (C. III 4°) s'il existe un changement de variable linéaire et périodique  $y = D(t)x$  permettant de transformer l'un en l'autre), ont été représentés par des tirets. On remarquera que certaines classes sont en entier dans  $\mathcal{J}_0$  (cas où  $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$ ), donc que toute transformation linéaire sur un système de cette classe laisse l'index invariant et nul. Au contraire, si une classe rencontre un  $\mathcal{J}_{2k} (k \neq 0)$  (cas où  $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) < 0$ ), elle les rencontre tous: étant donné un système différentiel dans une telle classe, tout index pair peut être obtenu à l'aide d'une transformation linéaire périodique adéquate.



### B. DÉFINITION DE L'INDEX $i(f, x^0)$

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases} \quad (3)$$