

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EQUATION FONCTIONNELLE $f(x+1) - f(x) = (x)$
Autor: Ardjomande, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41553>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$

par M. ARDJOMANDE

On connaît de nombreux résultats concernant l'existence et l'unicité des solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$, $\delta(x)$ donnée, satisfaisant à diverses conditions parfois globales. Un exemple classique est le théorème d'Artin ou Bohr et Mollerup, qui affirme que $\lg \Gamma(x)$ est l'unique solution convexe, à une constante additive près, de l'équation

$$f(x+1) - f(x) = \lg x, \quad x > 0.$$

Une généralisation de ce théorème a été évidemment de remplacer $\lg x$ par une fonction $\delta(x)$, jouissant de propriétés qui permettent la construction de $f(x)$; par exemple la monotonie, la convexité, ou la convexité d'ordre $m > 1$, avec dans chaque cas, une condition à la limite. Les théorèmes de M. Kuczma, ainsi que ceux de W. Krull, A. Dinghas, ou encore quelques résultats qui apparaissent dans l'article de J. Dufresnoy et Ch. Pisot, illustrent cela. Citons un des cas les plus simples:

Soit $\delta(x)$ une fonction donnée, non croissante pour $x \geq 0$, et

$$\delta(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Alors l'équation fonctionnelle

$$f(x+1) - f(x) = \delta(x), \quad f(0) \text{ donnée,}$$

possède la solution

$$f(x) = f(0) - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \delta(n) \right\}$$

et c'est l'unique solution non décroissante pour $x \geq 0$.

Or, il se trouve d'une part qu'une condition *locale* est suffisante pour définir la classe où l'unicité a lieu. Par exemple, le théorème d'Artin peut s'énoncer:

L'unique solution de l'équation $f(x+1) - f(x) = \lg(x)$, $x > 0$, qui satisfait à la condition

$$(1) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ y}} \left\{ \frac{f(y+n) - f(n)}{y} - \frac{f(x+n) - f(n)}{x} \right\} \geq 0, \quad 0 < x < y < 2,$$

(ou à la condition

$$(2) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ x}} \left\{ f(n+1) - f(n) - \frac{f(n+x) - f(n)}{x} \right\} = 0, \quad 0 < x < 1),$$

est $\lg \Gamma(x)$, à une constante additive près.

Pour le voir, d'abord il est clair que $\lg \Gamma(x)$, étant convexe, satisfait à (1) et (2). Supposons que f_1 et f_2 soient deux solutions satisfaisant à la condition (1).

Soit $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Pour $x \in]0, 1]$ on a

$$\left. \begin{aligned} f_1(n+1) - f_1(n) - \frac{f_1(n+x) - f_1(n)}{x} &> -\varepsilon \\ \frac{f_2(n+x) - f_2(n-1)}{x+1} - (f_2(n) - f_2(n-1)) &> -\varepsilon \end{aligned} \right\} n > n_{\varepsilon, x}$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(n+x) &= f_1(n+x) - f_2(n+x) < \\ < x \{ \lg n - \lg(n-1) \} + \varphi(n) + \varepsilon(2x+1) < \varepsilon(3x+1) + \varphi(1). \end{aligned}$$

De même

$$\varphi(x) > -\varepsilon(3x+1) + \varphi(1).$$

D'où

$$f_1(x) - f_2(x) = \varphi(x) \equiv \varphi(1), \quad x > 0, \text{ par périodicité.}$$

Ou encore, supposant que f_1 et f_2 sont deux solutions satisfaisant à la condition (2), pour $x \in]0, 1]$, on a

$$\left. \begin{aligned} f_1(n+1) - f_1(n) - \frac{f_1(n+x) - f_1(n)}{x} &> -\varepsilon \\ f_2(n+1) - f_2(n) - \frac{f_2(n+x) - f_2(n)}{x} &< \varepsilon \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{pour une infinité} \\ \text{de } n \end{array}$$

et en permutant les indices 1 et 2, on a ces inégalités pour une infinité de m .

$$\text{D'où} \quad \varphi(x) = \varphi(n+x) < \varphi(n) + 2\varepsilon x = \varphi(1) + 2\varepsilon x$$

$$\varphi(x) = \varphi(m+x) > \varphi(m) - 2\varepsilon x = \varphi(1) - 2\varepsilon x.$$

De manière analogue, dans le théorème relatif à $\delta(x)$ monotone et $\rightarrow 0$,

($x \rightarrow \infty$), cité ci-dessus, l'unicité peut s'énoncer comme suit: $f(x)$ est l'unique solution qui satisfait à la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ f(n+y) - f(n+x) \} \geq 0, \quad 0 \leq x < y \leq 1$$

(ou à la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ f(n+x) - f(n) \} = 0, \quad 0 < x < 1).$$

D'autre part, la nature de l'équation fonctionnelle envisagée, la lie aux séries de Newton:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{x}{k}, \quad \binom{x}{k} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

puisque une « somme » de la fonction $(^x)$ est la fonction $(^x_{k+1})$; et l'on vérifie immédiatement que si $\delta: [a, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$, $a \leq 0$, est développable en série de Newton, et $f(0)$ donnée, alors l'équation

$$f(x+1) - f(x) = \delta(x), \quad x \geq a,$$

possède une unique solution développable en série de Newton. Il paraît donc indiqué d'envisager une classe de fonctions $\delta(x)$, qui étend celle des fonctions développables en série de Newton. Et, pour chaque $\delta(x)$ donnée, on construira une solution unique dans une classe de fonctions, qui étend, d'une deuxième manière, celle des fonctions développables en série de Newton.

Les théorèmes I, II et III préciseront ces idées. Certains résultats connus sont des conséquences du théorème I. Les théorèmes II et III traitent de types de fonctions non envisagés jusqu'ici.

Dans ce qui suit $\Delta^k \varphi(x)$ sera définie pour $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ par

$$\Delta^0 \varphi(x) = \varphi(x) \quad \Delta \varphi(x) = \Delta^1 \varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

$$\Delta^k \varphi(x) = \Delta(\Delta^{k-1} \varphi(x)).$$

THÉORÈME I

Soit $\delta: D = \{0\} \cup \mathbf{N} \cup [a, \infty[\longrightarrow \mathbf{R}$

une fonction donnée. Pour que l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad f(x+1) - f(x) = \delta(x), \quad x \in D, \quad f(0) \text{ donné,}$$

ait une solution, il suffit qu'il existe en entier $M \geq 0$, tel que pour la suite de

polynômes

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^M \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k},$$

la série

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \{ \delta(n+x) - p_n(x) \} = S(x),$$

converge pour $x \in [a, \infty[$. Alors la série $S(x)$ converge sur D entier, et la fonction

$$(3) \quad f(x) = f(0) - S(x) + \sum_{k=0}^M \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k+1} + S(M+1) \binom{x}{M+1}$$

qui est indépendante du degré M des polynômes, est une solution de (1), qui satisfait à la condition:

$$(4) \quad f(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

pour tout entier $p \geq 1$, et $x \in D$, $m = \min \{M\}$.

De plus (3) est l'unique solution de (1) qui satisfasse à (4) pour un entier $p \geq 1$, et tout $x \in [a, a+1[$. Enfin la condition de convergence (2) est remplie si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \delta(n+x) - P_n(x) \}$$

converge sur D , pour une suite de polynômes $P_n(x)$ quelconques, de degrés bornés.

Remarque

Un changement de variables permet d'énoncer le théorème I sous la forme suivante:

Soit $\delta: [a, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction donnée.

Pour que l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad f(x+1) - f(x) = \delta(x), \quad x \in [a, \infty[, \quad f(a) \text{ donnée,}$$

ait une solution, il suffit qu'existe un entier $M \geq 0$ tel que pour

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^M \Delta^k \delta(n+a) \binom{x-a}{k},$$

la série

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \{\delta(n+x) - p_n(x)\} = S(x)$$

converge pour $x \in [a, \infty[$.

Alors la fonction

$$(3) \quad f(x) = f(a) - S(x) + \sum_{k=0}^M \Delta^k \delta(a) \binom{x-a}{k+1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{M+1} \delta(n+a) \binom{x-a}{M+1}$$

indépendante de M , est une solution de (1), qui satisfait à la condition

$$(4) \quad f(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k f(n+a) \binom{x-a}{k} \longrightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

pour tout entier $p \geq 1$, $x \in [a, \infty[$, $m = \min \{M\}$.

De plus (3) est l'unique solution de (1) qui satisfasse à (4) pour un entier $p \geq 1$, et $x \in [a, a+1[$.

Démonstration du Théorème I

On utilisera les identités

$$(5) \quad \Delta^j \varphi(q+x) = \sum_{k=0}^q \Delta^{k+j} \varphi(x) \binom{q}{k}, j, q, \text{ entiers } \geq 0.$$

$$(6) \quad \text{Si } p_n(x) = \sum_{k=0}^m \Delta^k \varphi(n+a) \binom{x}{k}, \text{ alors}$$

$$p_{n+1}(x) = p_n(x+1) + \Delta^{m+1} \varphi(n+a) \binom{x}{m}; n, m, \text{ entiers } \geq 0.$$

Soit

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^m \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k}.$$

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{\delta(n+x) - p_n(x)\} = s(x)$$

converge en tout entier $q \geq 0$. En effet, pour $0 \leq q \leq m$,

$$(5) \Rightarrow \delta(n+q) - p_n(q) = 0 \Rightarrow s(q) = 0$$

Et pour $q \geq m+1$, il suffira de vérifier que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta^q \delta(i)$$

converge, puisque

$$\sum_{i=0}^n \left\{ \delta(i+q) - \sum_{k=0}^m \Delta^k \delta(i) \binom{q}{k} \right\} \stackrel{(5)}{=} \sum_{k=m+1}^q \left\{ \sum_{i=0}^n \Delta^k \delta(i) \right\} \binom{q}{k}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \sum_{i=0}^n \{ \delta(i+x+1) - p_i(x+1) \} - \{ \delta(i+x) - p_i(x) \} &= \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ \delta(i+x+1) - p_{i+1}(x) - \delta(i+x) + p_i(x) + \Delta^{m+1} \delta(i) \binom{x}{m} \right\} \\ &= \sum_{i=0}^n \Delta^{m+1} \delta(i) \binom{x}{m} + \{ \delta(n+x+1) - p_{n+1}(x) \} - \{ \delta(x) - p_0(x) \} \\ &\stackrel{x \geq a}{\Rightarrow} \sum_{i=0}^n \Delta^{m+1} \delta(i) \binom{x}{m} \longrightarrow s(x+1) - s(x) + \delta(x) - p_0(x), (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

D'où, par récurrence, la convergence de

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta^q \delta(i), \quad \forall q \geq m+1.$$

On en tire, en particulier, que

$$(7) \quad s(m+1) \binom{x}{m} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{m+1} \delta(n) \binom{x}{m} = \Delta s(x) + \delta(x) - p_0(x), \quad x \geq a$$

$$(8) \quad \forall x \in D, \text{ on a encore cette identité.}$$

Posons

$$f(x) = f(0) - s(x) + \sum_{k=0}^m \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k+1} + s(m+1) \binom{x}{m+1}, \quad x \in D.$$

Alors $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$ (en vertu de (8)). Et si

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \Delta^k f(n) \binom{x}{k}; \quad q_0(x) = f(0) + \sum_{k=0}^m \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k+1}$$

D'où

$$f(n+x) - q_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \{ \delta(i+x) - q_{i+1}(x) + q_i(x) \} + f(x) - q_0(x)$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i+x) - p_i(x) + p_i(x) - \sum_{k=0}^{m+1} \Delta^{k+1} f(i) \binom{x}{k} \right\} + f(x) - q_0(x) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i+x) - p_i(x) \right\} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^{m+1} \delta(i) \binom{x}{m+1} + f(x) - q_0(x) \\
 &\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

De plus

$$f(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

puisque pour

$$q \geq m+2, \quad \sum_{k=m+2}^q \Delta^k f(n) \binom{x}{k} = \sum_{k=m+1}^{q-1} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

En outre, si $f_M(x)$ est la forme de la solution, correspondant à une suite de polynômes de degré M ,

$$\begin{aligned}
 f_M(x) - f(x) &= f_M(x+n) - f(x+n) \\
 &= \left\{ f_M(x+n) - \sum_{k=0}^{M+1} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} \right\} - \left\{ f(x+n) - \sum_{k=0}^{m+1} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} \right\} \\
 &\quad + \sum_{m+1}^M \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k+1} \\
 &\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $f_M(x) \equiv f(x)$, $x \in D$.

Pour voir l'unicité, soit $g(x)$, une solution sur D , avec $g(0) = f(0)$, et

$$g(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k g(n) \binom{x}{k} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

pour $x \in [a, a+1[$, et un entier $p \geq 1$.

Vu que $\Delta^k f(n) = \Delta^k g(n)$, $\forall k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
 g(x) - f(x) &= g(n+x) - f(n+x) = \left\{ g(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k g(n) \binom{x}{k} \right\} - \\
 &\quad - \left\{ f(n+x) - \sum_{k=0}^{m+p} \Delta^k f(n) \binom{x}{k} \right\} \\
 &\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad x \in [a, a+1[.
 \end{aligned}$$

D'où $g(x) \equiv f(x)$ sur D , par périodicité de la différence de deux solutions. Enfin si

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^M a_{nk} \binom{x}{k}, \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - P_n(x) \right\} = S(x)$$

converge sur D , la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n) - a_{n0} \right\} = S(0)$$

implique la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \delta(n) - \sum_{k=1}^M a_{nk} \binom{x}{k} \right\}$$

et on achève la démonstration par récurrence.

Remarquons que certains théorèmes connus sont des conséquences du théorème I.

En ce qui concerne l'existence d'une solution, les conditions suffisantes de

1. M. Kuczma [1], J. Dufresnoy et Ch. Pisot [2]

2. W. Krull [5], M. Kuczma [6], A. Dinghas [4]

impliquent chacune la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - p_n(x) \right\},$$

avec degré de $p_n(x) = 0, 1$ respectivement.

3. On prévoit de manière analogue, que si $\delta(x)$ est m fois dérivable, $\delta^{(m)}(x)$ non croissante pour $x \geq 0$ (J. Dufresnoy et Ch. Pisot [2]), ou si $\delta(x)$ est concave d'ordre m au sens de T. Popoviciu, avec $\Delta^m \delta(x) \rightarrow 0, (x \rightarrow \infty)$ (M. Kuczma [8]), on aurait la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - p_n(x) \right\}$$

avec degré de $p_n(x) = m$.

En ce qui concerne l'unicité, si une solution satisfait aux conditions d'unicité des théorèmes connus, alors elle satisfait à la condition (4) du théorème I.

Plus précisément, les conditions

1'. $g(x)$ solution non décroissante (dans un $vg(\infty)$) avec $\delta(x)$ (non croissante) $\rightarrow 0$, ($x \rightarrow \infty$);

(J. Dufresnoy et Ch. Pisot [2], M. Kuczma [1] et [3])

2'. $g(x)$ solution convexe (dans un $vg(\infty)$), avec $\delta(x)$ (concave) satisfaisant à $\Delta\delta(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$);

(W. Krull [5], M. Kuczma [6] et [7], A. Dinghas [4])

entraînent que

$$g(n+x) - \sum_{k=0}^{m+1} \Delta^k g(n+a) \binom{x-a}{k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

avec $m = 0, 1$ respectivement.

Montrons que c'est le cas pour 1'. Pour 2', cela sera analogue. Soit $x \in [a, a+1[$.

$$\begin{aligned} & \lim \left\{ g(n+x) - g(n+a) - \binom{x-a}{1} \Delta g(n+a) \right\} \\ &= \lim \left\{ g(n+x) - g(n+a) \geq 0 \right\} \\ & \lim \left\{ -g(n+x) + g(n+a) + \binom{x-a}{1} \Delta g(n+a) \right\} \\ &= \lim \left\{ g(n+a+1) - g(n+x) - (1-x+a) \delta(n+a) \right\} \\ &= \lim \left\{ g(n+a+1) - g(n+x) \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

D'où la limite vaut 0 pour $x \in [a, a+1[$, et même pour tout $x \geq a$, en écrivant $x = x' + q$, $x' \in [a, a+1[$, q entier ≥ 0 .

3'. Encore ici, on peut prévoir que même pour $m > 1$, si $g(x)$ est une solution à dérivée m -ième non décroissante [2], ou une solution convexe d'ordre m [8], avec $\delta(x)$ satisfaisant respectivement aux conditions citées sous 3, la condition (4) du théorème I aurait lieu.

Notons qu'il peut arriver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^m \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k} \right\}$$

diverge, pour tout entier $m \geq 0$, et que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k} \right\}$$

convergent; comme le montre l'exemple:

$$\delta(x) = (1+\alpha)^x, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Inversément la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - p_n(x) \right\}$$

même en tout x , n'implique nullement que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k}$$

converge.

Avant d'énoncer le théorème II, rappelons que:

1) Si

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{x}{k}; \quad x \geq 0$$

alors $a_k = \Delta^k \varphi(0)$, $\forall k$.

2) Si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \varphi(0) \binom{x}{k} = \varphi^*(x)$$

converge, $\forall x \geq a$

alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \varphi(n) \binom{x}{k}$$

converge et $= \varphi^*(n+x)$, $\forall x \geq a$.

3) Si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k}$$

converge et $\Delta f(x) = \delta(x)$

alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k f(n) \binom{x}{k}$$

converge aussi.

THÉOREME II

Soit $\delta : D = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup [a, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ et $f(0)$ donnés.

Supposons que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k} = \delta^*(x)$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \right\} = S(x)$$

converge, $\forall x \geq a$.

Alors l'équation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$, $x \in D$, possède une solution :

$$4) \quad f(x) = f(0) - S(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k+1}$$

telle que pour $x \in D$,

$$5) \quad f(n+x) - f^*(n+x) \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty),$$

et (4) est l'unique solution qui satisfasse à (5), pour $x \in [a, a+1[$.

Démonstration du théorème II

Pour tout entier $m \geq 0$, $S(m) = 0$

Pour $x \in [a, \infty[$,

$$6) \quad \begin{aligned} S(x+1) - S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \} - \\ &- \delta(x) + \delta^*(x) = -\delta(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k}. \end{aligned}$$

Posons

$$f(x) = f(0) - S(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k+1}, \quad x \in D.$$

Pour tout entier $m \geq 0$,

$$f(m+1) - f(m) = \sum_{k=0}^m \Delta^k \delta(0) \binom{m}{k} = \delta(m).$$

Et pour $x \in [a, \infty[$, $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$, par 6).

De plus

$$f^*(x+1) - f^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^k f(0) \binom{x}{k-1} = \delta^*(x),$$

ce qui implique:

$$\begin{aligned} f(n+x) - f^*(n+x) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i+x) - \delta^*(i+x) \right\} + f(x) - f^*(x) \\ &\longrightarrow S(x) + f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^{k+1} f(0) \binom{x}{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Enfin, soit $g(x)$ t.q. $g(x+1) - g(x) = \delta(x)$, $\forall x \in D$;

$g(n+x) - g^*(n+x) \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$, $\forall x \in [a, a+1[$; et $g(0) = f(0)$.

Vu que $g(n) = f(n)$, $\forall n$ entier ≥ 0 , et que

$$\begin{aligned} g^*(n+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k g(n) \binom{x}{k} = g(n) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k+1} \\ &= f(n) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^{k+1} f(n) \binom{x}{k+1} = f^*(n+x) \end{aligned}$$

on a, $\forall x \in [a, a+1[$

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= g(n+x) - f(n+x) = \left\{ g(n+x) - g^*(n+x) \right\} \\ &\quad - \left\{ f(n+x) - f^*(n+x) \right\} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

D'où $g(x) \equiv f(x)$ sur D , par périodicité de la différence de deux solutions.

Si $\delta(x)$ satisfait à la fois aux hypothèses des théorèmes I et II, pour que les solutions associées coïncident il faut et il suffit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k+1} = 0$$

Mais la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\}$$

pour une suite double (a_{nk}) n'entraîne même pas la convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k}$$

en général. Exemple: $\delta(x) = (-\frac{1}{2})^{[x]} + (1+\alpha)^x$, $0 < \alpha < 1$, où le théorème I n'est, de plus, pas applicable.

Et même la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\} = s(x)$$

avec convergence uniforme relativement à k , de la série,

$$\Delta^k s(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^k \delta(n) - a_{nk})$$

n'entraîne pas la convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k}$$

pour tout entier $n \geq 0$; mais seulement pour n suffisamment grand.

Exemple:

$$\delta(x) = \varphi(x) + (1+\alpha)^x, \quad 0 < \alpha < 1, \text{ où}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, 2, 3, \dots \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{et } |\varphi(x)| \leq \frac{1}{x^\beta} \text{ partout; } \beta > 1.$$

On peut formuler des conditions suffisantes pour la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \right\},$$

dont par exemple:

Soit (a_{nk}) une suite double telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\} = s(x)$$

converge, $x \in [a, \infty[\cup \{0\} \cup \mathbf{N}$;

et soit

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \Delta^k \delta(n) - a_{nk} \right| \leq M_k$$

pour tout $N' \geq N$, et

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k \left| \binom{x}{k} \right|$$

convergente, $x \geq a$.

Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k} = \delta^*(x)$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \right\}$$

converge, $x \geq a$.

En effet, on démontre par récurrence que $\forall m \in \mathbf{N}$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^m \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k} - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\}$$

converge.

L'hypothèse implique la convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \delta(0) \binom{x}{k} = \delta^*(x)$$

On écrit enfin,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{N'} \left\{ \delta(n+x) - \delta^*(n+x) \right\} \right| &\leq \left| \sum_{n=N}^{N'} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{k=0}^m \Delta^k \delta(n) \binom{x}{k} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k} \right\} \right| + \sum_{m+1}^{\infty} \left| \sum_N^{N'} (\Delta^k \delta(n) - a_{nk}) \right| \left| \binom{x}{k} \right|. \end{aligned}$$

Indépendamment, on peut énoncer le théorème suivant, dont le théorème II (pour $a=0$) est un cas particulier.

THÉOREME III

Soit $\delta : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$, et $f(0)$ donnés.

Soit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k}$$

une suite de séries de Newton, telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(n+x) - P_n(x) \right\} = S(x)$$

converge $x \geq 0$; et

$$\Delta^k S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Delta^k \delta(n) - a_{nk} \right\}$$

converge uniformément rel. à $k = 0, 1 \dots$. Alors l'équation fonctionnelle:

$$f(x+1) - f(x) = \delta(x)$$

possède une solution

$$f(x) = f(0) + S(0) - S(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k+1},$$

où

$$\lambda_k = \Delta^{k+1} S(0) + \Delta^k \delta(0).$$

Cette solution est *indépendante* du choix de la suite $P_n(x)$, et l'unique qui satisfait à la condition

$$f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \longrightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty), \quad x \in [0, 1[,$$

où (α_{nk}) est l'une quelconque des suites doubles ci-dessus.

Démonstration du théorème III.

Soit

$$A_{nk} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ik}, \quad \text{et} \quad a_{nk} - A_{n,k+1} = b_{nk}$$

On a:

$$\Delta^{k+1} S(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \Delta^k \delta(n) - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k+1} \right\} - \Delta^k \delta(0)$$

D'où

$$(1) \quad b_{nk} \rightarrow \Delta^{k+1} S(0) + \Delta^k \delta(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_k, \quad (n \rightarrow \infty),$$

uniformément en $k = 0, 1 \dots$

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k},$$

donc aussi

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k+1}$$

convergent.

De ceci, de (1) et du fait que $x \geq 0$, découle la convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k+1}.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k}, \quad (n \rightarrow \infty),$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k+1} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k+1}, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Posons

$$f(x) = f(0) + S(0) - S(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \binom{x}{k+1}.$$

On vérifie que:

$$\begin{aligned} S(x+1) - S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \delta(n+x) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \binom{x}{k-1} \right\} - \delta(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ P_n(x) - \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k+1} \binom{x}{k} \right\} - \delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k} - \delta(x). \end{aligned}$$

D'où $f(x+1) - f(x) = \delta(x)$.

Vu que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ P_i(x) - P_i(0) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k+1} \binom{x}{k+1},$$

$$f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k+1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i+x) - \delta(i) \right\} + f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k+1} = \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i+x) - P_i(x) \right\} - \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \delta(i) - P_i(0) \right\} - \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \binom{x}{k+1} + f(x) - f(0) \\
 &\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Et si (α_{nk}) est une quelconque des suites doubles satisfaisant aux hypothèses, comme $a_{nk} - \alpha_{nk} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) uniformément en k , on en déduit que

$$f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Pour voir que la solution est indépendante du choix de la suite $P_n(x)$, soit $f_1(x)$ la solution associée à une autre suite. La remarque précédente entraîne que :

$$\begin{aligned}
 f(x) - f_1(x) &= \left\{ f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} - \\
 &\quad - \left\{ f_1(n+x) - f_1(n) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Donc $f = f_1$.

Pour vérifier, enfin, l'unicité, soit $g(x)$ une solution satisfaisant à

$$\left\{ g(n+x) - g(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad x \in [0, 1[.$$

Soit $f(x)$ la solution associée à la suite (α_{nk}) par la construction ci-dessus.

$$\begin{aligned}
 f(x) - g(x) &= \left\{ f(n+x) - f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} - \\
 &\quad - \left\{ g(n+x) - g(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \binom{x}{k+1} \right\} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

D'où $f = g$ (par périodicité de la différence de 2 solutions).

RÉFÉRENCES

- [1] KUCZMA, M., Sur une équation fonctionnelle. *Math.*, vol. 3 (26,) 1 (1961), pp. 79-87.
- [2] DUFRESNOY, J. et Ch. PISOT, Sur la relation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$.
Bulletin de la Société mathématique de Belgique, tome XV, fasc. 3 (1963), pp. 259-270.
- [3] KUCZMA, M., Remarques sur quelques théorèmes de J. Anastassiadis. *Bulletin Sci. Math.* (2), 84 (1960), pp. 98-102.
- [4] DINGHAS, A., Zur Theorie der Gammafunktion. *Math. Phys. Semesterberichte*, Band VI, Heft 3/4 (1959), pp. 245-252.
- [5] KRULL, W., Bemerkungen zur Differenzengleichung $g(x+1) - g(x) = \varphi(x)$.
Math. Nachr., 1 (1948), pp. 365-376.
- [6] KUCZMA, M., O równaniu funkcyjnym $g(x+1) - g(x) = \varphi(x)$. *Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiell, Mat. Fiz. Chem.*, 4 (1958), pp. 27-38.
- [7] — On convex solutions of the functional equation $g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$.
Publ. Math. Debrecen (1959), pp. 40-47.
- [8] — Sur une équation aux différences finies et une caractérisation fonctionnelle des polynômes. *Fund. Math.*, LV (1964), pp. 77-86.

(Reçu le 15 mai 1968.)

M. Ardjomande
Institut de Mathématiques
Université de Genève
1211 Genève 4.