

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS  
**Autor:** Crépeaux, E.  
**Kapitel:** §2. — Caractérisation des couples henseliens  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41551>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

En effet, dans chacune de ces deux lignes, les deux membres, qui sont des polynômes de degré  $\binom{n}{r} - 1$  en  $V$  sur  $A_0[X]$  prennent la même valeur quand on substitue à  $V$  les  $\binom{n}{r}$  valeurs  $E^\sigma$ , où  $\sigma \in \mathcal{S}$ .

Un petit calcul conduit à l'identité:

$$(1) \quad P'^2(V) F(X) = \\ = [P'(V) X^r + \dots + (-1)^r B_r(V)] [P'(V) X^{n-r} + \dots + (-1)^{n-r} C_{n-r}(V)] + \\ + P(V) Q(V, X).$$

Remarquons enfin que le résultant de  $G(X)$  et  $H(X)$  divise  $P'(E)$  dans l'anneau  $A_1$  car  $P'(E) = \prod_{\sigma \neq 1} (E - E^\sigma)$  « s'annule si  $G(X)$  et  $H(X)$  ont une racine commune ».

Comme tout anneau est quotient d'un anneau factoriel, *les identités ci-dessus sont valables si l'on remplace A par un anneau commutatif à élément unité quelconque.*

## § 2. — CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $\mathcal{A}$  un idéal de  $A$ ,  $\bar{A} = A/\mathcal{A}$  l'anneau quotient. On note  $\bar{a}$  l'image ou « reste » dans  $\bar{A}$  de l'élément  $a$  de  $A$ ,  $\bar{f}$  l'image du polynôme  $f$  à coefficients de  $A$ , que nous appellerons le reste de  $f$ .

Si  $\phi \in A$ , on note  $A_\phi$  l'anneau de fractions relativement à la partie multiplicative des puissances positives de  $\phi$ ; on notera  $a_\phi$  (resp.  $f_\phi$ ) l'image dans  $A_\phi$  de l'élément  $a \in A$  (resp. du polynôme  $f$  sur  $A$ ).

Si, de plus,  $\phi$  est inversible modulo  $\mathcal{A}$ , on a un diagramme commutatif canonique:

$$\begin{array}{ccc} & A_\phi & \\ \nearrow & \downarrow & \\ A & & \bar{A} \end{array}$$

qui permet de parler du reste d'un élément de  $A_\phi$  ou d'un polynôme à coefficients dans  $A_\phi$ .

*Proposition 1.* — Les conditions suivantes sur le couple  $(A, \mathcal{A})$  sont équivalentes:

- (i) Si  $f$  est un polynôme unitaire de  $A[X]$  dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires  $\bar{g}$  et  $\bar{h}$  de résultant inversible, il

existe  $\phi \in A$ , de reste inversible, deux polynômes unitaires  $g$  et  $h \in A_\phi[X]$ , de restes respectifs  $\bar{g}$  et  $\bar{h}$ , de résultant inversible tel que  $f_\phi = gh$ .

- (ii) Si  $p(V) = V^k - a_1 V^{k-1} - \dots - a_k$  est un polynôme de  $A[V]$  tel que  $a_2, \dots, a_k$  appartiennent à  $\mathcal{A}$  et que  $\bar{a}_1$  soit inversible, il existe  $\phi \in A$  de reste inversible, et un élément  $a \in A_\phi$ , de reste  $\bar{a}_1$ , racine simple de  $p(V)$  [i.e.  $p_\phi(a) = 0$ ,  $p'_\phi(a)$  inversible].
- (iii) Si  $p(V)$  est un polynôme unitaire de  $A[V]$  dont le reste a une racine simple  $\bar{e}$ , il existe  $\phi \in A$ , de reste inversible, et une racine simple  $e$ , de  $p_\phi(V)$  dans  $A_\phi$ , de reste  $\bar{e}$ .
- (iv) Si  $q(U) = U^k - b_1 U^{k-1} - \dots - b_k$  est un polynôme de  $A[U]$  tel que  $b_k \in \mathcal{A}$  et que  $\bar{b}_{k-1}$  soit inversible, alors il existe  $\phi \in A$ , de reste inversible et un élément  $d \in A_\phi$ , de reste nul, racine simple de  $q_\phi(U)$ .

*Démonstration.* — Il est clair que (iii) entraîne (ii) et que (i) entraîne (iv). D'autre part, en opérant une translation sur  $U$ , on voit que (iv) entraîne (iii).

Montrons que (ii) entraîne (i).

Soit  $f = X^n - s_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n$  le polynôme donné. Soit  $h_1 \in A[X]$  de reste  $\bar{h}$ . On pose  $E = h_1(X_1) \dots h_1(X_n)$ . On en déduit, avec les notations du § 1, les polynômes  $P(V), B_i(V), C_i(V), Q(V, X)$ . Par l'homomorphisme de  $A$  sur  $\bar{A}$ , ces polynômes sont transformés en  $\bar{E}, \bar{P}, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{Q}$ . D'autre part, spécialisant  $S_i$  en  $s_i$  ( $i \in I$ ) on obtient, avec des notations évidentes  $p(V), b_i(V), e_i(V), q(V, X)$  qui, d'après le § 1, vérifient:

$$\begin{aligned} p'^2(V)f &= \\ &= [p'(V)X^r + \dots + (-1)^r b_r(V)] [p'(V)X^{n-r} + \dots + (-1)^{n-r} c_{n-r}(V)] \\ &+ p(V)q(V, X). \end{aligned}$$

Pour calculer le reste de  $p(V)$ , on introduit un anneau  $\bar{B}$  contenant  $\bar{A}$  et des  $x_i$  ( $i \in I$ ) tels que  $\bar{g}(X) = \prod_{i \in J} (X - \bar{x}_i)$ ,  $\bar{h}(X) = \prod_{i \in I - J} (X - \bar{x}_i)$ . La substitution  $X_i \rightarrow \bar{x}_i$  transforme  $\bar{E}$  en le résultant inversible  $\bar{e} = \bar{h}(\bar{x}_1) \dots \bar{h}(\bar{x}_r)$  de  $\bar{g}$  et  $\bar{h}$ , et, comme, pour  $\sigma \neq 1$ ,  $\bar{E}^\sigma$  est transformé en 0, on aura  $\bar{p}(V) = V^{k-1}(V - \bar{e})$ , où  $k = \binom{n}{r}$ .

Il existe, d'après (ii), un élément  $\phi \in A$ , de reste inversible, et un élément  $e \in A_\phi$ , de reste  $\bar{e}$  tel que  $p_\phi(e) = 0$  et que  $p'_\phi(e)$  soit inversible. On a donc la décomposition dans  $A$ :

$$(2) \quad f = \left[ X^r - \frac{b_{1,\phi}(e)}{p_{\phi}(e)} X^{r-1} + \dots + (-1)^r \frac{b_{r,\phi}(e)}{p_{\phi}(e)} \right] \cdot \left[ X^{n-r} - \frac{c_{1,\phi}(e)}{p_{\phi}(e)} X^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n-r} \frac{c_{n-r,\phi}(e)}{p_{\phi}(e)} \right].$$

Pour voir que les polynômes entre crochets ont, pour restes,  $\bar{g}$  et  $\bar{h}$ , il suffit d'utiliser le fait que  $\bar{B}_i(\bar{E}) = \bar{P}'(\bar{E}) T_i$ ,  $\bar{C}_i(\bar{E}) = \bar{P}'(\bar{E}) U_i$  et la substitution  $X_i \rightarrow \bar{x}_i$ . La remarque faite en fin du § 1 entraîne que le résultant de ces deux polynômes est inversible.

*Proposition 2.* — Les conditions suivantes sur le couple  $(A, \mathcal{A})$  sont équivalentes :

- (i) Si  $f$  est un polynôme unitaire de  $A[X]$  dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires  $\bar{g}$  et  $\bar{h}$  de résultant inversible, il existe  $\phi \in A$  de reste inversible possédant la propriété suivante: il existe un couple de polynômes  $g, h \in A_{\phi}[X]$  de restes respectifs  $\bar{g}$  et  $\bar{h}$ , tel que  $f_{\phi} = gh$ . Le couple  $(g, h)$  est unique sous ces conditions et le résultant de  $g$  et  $h$  est inversible.
- (ii) Si  $p(V) = V^k - a_1 V^{k-1} - \dots - a_k$  est un polynôme de  $A[V]$  tel que  $a_2, \dots, a_k$  appartiennent à  $\mathcal{A}$  et que  $\bar{a}_1$  soit inversible, il existe un élément  $\phi \in A$  de reste inversible possédant la propriété suivante:  $p_{\phi}$  a dans  $A$  une racine de reste  $\bar{a}$ , unique sous ces conditions et simple.
- (iii) Si  $p(V)$  est un polynôme unitaire de  $A[V]$  dont le reste a une racine simple  $\bar{e}$ , il existe  $\phi \in A$  de reste inversible possédant la propriété suivante:  $p_{\phi}$  a, dans  $A_{\phi}$ , une racine de reste  $\bar{e}$ , unique sous ces conditions et simple.
- (iv) Si  $q(U) = U^k - b_1 U^{k-1} - \dots - b_k$  est un polynôme de  $A[U]$  tel que  $b_k$  appartienne à  $\mathcal{A}$  et que  $\bar{b}_{k-1}$  soit inversible, il existe  $\phi \in A$ , de reste inversible possédant la propriété suivante:  $q_{\phi}$  a dans  $A_{\phi}$  une racine de reste nul, unique sous ces conditions et simple.

*Démonstration.* — Ici encore il suffit de montrer que (ii) entraîne (i). On reprend la construction de la démonstration correspondante de la proposition 1. On part de  $h_1 \in A[X]$ , de reste  $\bar{h}$ , qui fournit le polynôme  $p(V) \in A[X]$ . L'élément  $\phi$  de cette construction est choisi de manière à satisfaire les hypothèses (ii) ci-dessus, c'est-à-dire que  $p_{\phi}$  a dans  $A_{\phi}$  une racine  $e$  de reste  $\bar{e}$ , unique sous ces conditions, et simple.

Soit alors  $f = gh$  une autre décomposition avec  $g$  et  $h$  de restes respectifs  $\bar{g}$  et  $\bar{h}$ . On introduit un anneau  $B$  contenant  $A$  et des  $x_i$  ( $i \in I$ ) tels que  $g = \prod_{i \in J} (X - x_i)$ ,  $h = \prod_{i \in I - J} (X - x_i)$ . Pour calculer  $p_{\phi}(V)$ , on utilise la spécialisa-

tion  $X_i \rightarrow x_i$ , de sorte que l'élément  $h_1(x_1) \dots h_1(x_2)$  est racine de  $p_\phi$ , et comme il a pour reste  $\bar{e}$ , il est nécessairement égal à  $e$ . Compte tenu des relations  $P'(V) V_i(V) = T_i$ ,  $P'(V) C_i(V) = U_i$ , on voit alors que la décomposition  $f = gh$  n'est autre que celle obtenue par l'identité (2), ce qui en montre l'unicité.

*Remarque.* — Si  $\phi$  possède la propriété ci-dessus, il en est de même de tout élément  $\phi\theta$ , où  $\theta$  est inversible.

*Définition.* — Un couple vérifiant les conditions de la proposition 1 (resp. 2) sera dit faiblement hensélien (resp. hensélien).

*Remarque.* — Nous ne gardons pas ici les définitions de J.P. Lafon mais nous allons voir ci-dessous que dans les cas usuels les notions coïncident.

### § 3. — PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

1. — Soit  $(A, \mathcal{A})$  un couple tel que  $\mathcal{A}$  soit contenu dans le radical (de Jacobson) ou intersection des idéaux maximaux de  $A$  (il revient au même de dire qu'un élément de  $A$  est inversible dès que son reste l'est. Si  $(A, \mathcal{A})$  est faiblement hensélien, alors il est hensélien. On retrouve alors la définition de Lafon.

Tout d'abord les éléments  $\phi$  intervenant dans les énoncés des propositions peuvent être choisis égaux à 1. Il reste à voir l'unicité de la décomposition de  $f$  sous les hypothèses de (1) prop. 2. La démonstration faite dans le cas local dans [1] s'étend sans modification :

Si  $f = gh = g_1 h_1$  avec  $\bar{g} = \bar{g}_1$ ,  $\bar{h} = \bar{h}_1$ ,  $g$  et  $h_1$  ont un résultant inversible puisqu'il en est de même de leur reste. Il existe alors  $u, v \in A[X]$  tels que  $ug + vh_1 = 1$ , soit  $ugh + vh_1h = h$ , d'où  $(ug_1 + vh)h_1 = h$ ; le polynôme  $h_1$  divise  $h$ ; de même  $h$  divise  $h_1$ ; ces polynômes étant unitaires, on a  $h = h_1$  et de même,  $g = g_1$ .

2. — Soit  $(A, \mathcal{A})$  un couple et  $\phi \in A$  de reste inversible; les éléments de  $A_\phi$  de reste nul forment l'idéal  $\mathcal{A}_\phi$  des fractions  $a/\mathcal{A}_\phi^p$  où  $a \in \mathcal{A}$ ,  $p \in N$ .

Si  $(A, \mathcal{A})$  est faiblement hensélien ou hensélien, il en est de même de  $(A_\phi, \mathcal{A}_\phi)$ .

Supposons  $(A, \mathcal{A})$  faiblement hensélien, et soit  $p(V) = V^k - b_1 V^{k-1} - \dots - b_k$  un polynôme sur  $A_\phi$  où  $\bar{b}_1$  est inversible et où  $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{A}_\phi$ . En prenant l'entier  $m$  assez grand, on peut écrire

$$p(V) = V^k - \frac{a}{\phi^m} V^{k-1} - \dots - \frac{a_k}{\phi^{km}}$$