

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS
Autor: Crépeaux, E.
Kapitel: §1. — Identité de rauzy
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41551>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UNE CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS

par E. CRÉPEAUX

De façon sommaire, dire que l'anneau local d'un point t_0 d'une variété algébrique V est hensélien signifie que le théorème des fonctions implicites est vérifié en t_0 pour les relations algébriques $f(x, t) = 0$ où $t \in V$ et où x est la fonction inconnue à définir sur V , autrement dit si les relations $f(x_0, t_0) = 0$ et $f'_x(x_0, t_0)$ inversible permettent de définir une fonction $x(t)$ sur un voisinage de t_0 vérifiant la relation donnée et telle que $x(t_0) = x_0$.

Dans ce travail, nous étendons cette définition locale de Nagata [1], en adaptant légèrement celle de Lafon [2] au cas où l'on remplace un point par une partie fermée F de V . Nous nous sommes cru obligés, pour des questions techniques, d'introduire deux notions sensiblement voisines correspondant à deux façons d'envisager le théorème des fonctions implicites:

- a) couple faiblement hensélien: on exige seulement que la relation $f(x, t) = 0$ vérifiée sur F (avec bien entendu une condition d'inversibilité sur f'_x) définisse un germe de fonctions implicites au voisinage de F ,
- b) couple hensélien: on exige en outre que la fonction implicite soit unique dans tout voisinage assez petit de F .

§ 1. — IDENTITÉ DE RAUZY

Soient $I = \{1, \dots, n\}$ et $J = \{1, \dots, r\}$ pour $r \in I$. On note $i \in I$, $(\sigma, i) \rightarrow i^\sigma$ l'opération du groupe \mathcal{G} des permutations de I . Soit \mathcal{H} le sous-groupe de \mathcal{G} des permutations laissant J globalement invariant; le sous-groupe $\mathcal{H}^\sigma = \sigma \mathcal{H} \sigma^{-1}$ laisse alors J^σ globalement invariant. Soit \mathcal{S} un système de représentants de \mathcal{G} modulo la relation d'équivalence $''J^\sigma = J^{\sigma'}''$ ($\sigma, \sigma' \in \mathcal{G}$) \mathcal{S} a alors $\binom{n}{r}$ éléments correspondant aux parties de r éléments de I ; on suppose que \mathcal{S} contient l'élément neutre de \mathcal{G} , correspondant à J .

Soient A un anneau factoriel, X_1, \dots, X_n, X, V des indéterminées.

On pose:

$$F(X) = \prod_{i \in I} (X - X_i) = X^n - S_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n S_n.$$

On fait opérer \mathcal{G} sur ces indéterminées par $(X_i)^\sigma = X_i^\sigma$, $X^\sigma = X$, $V^\sigma = V$, $\forall \sigma \in \mathcal{G}$. On pose $A_2 = A[X_1, \dots, X_n]$. Les points fixes de A_2 par \mathcal{G} forment le sous-anneau $A_0 = A[S_1, \dots, S_n]$ des polynômes symétriques en X_1, \dots, X_n .

Posons:

$$G(X) = \prod_{i \in J} (X - X_i) = X^r - T_1 X^{r-1} + \dots + (-1)^r T_r$$

$$H(X) = \prod_{i \in I-J} (X - X_i) = X^{n-r} - U_1 X^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n-r} U_{n-r}.$$

Le sous-anneau de A_2 formé des points fixes par \mathcal{H} est

$$A_1 = A_0[T_1, \dots, T_r] = A_0[U_1, \dots, U_{n-r}].$$

et le sous-anneau des points fixes par \mathcal{H}^σ est donc

$$A_1^\sigma = A_0[T_1^\sigma, \dots, T_r^\sigma] = A_0[U_1^\sigma, \dots, U_{n-r}^\sigma].$$

On remarque:

$$G^\sigma(X) = \prod_{i \in J^\sigma} (X - X_i) = X^r - T_1^\sigma X^{r-1} + \dots + (-1)^r T_r^\sigma$$

$$H^\sigma(X) = \prod_{i \in I-J^\sigma} (X - X_i) = X^{n-r} - U_1^\sigma X^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n-r} U_{n-r}^\sigma.$$

On a, $\forall \sigma \in \mathcal{G}$, $G^\sigma(X) H^\sigma(X) = F(X)$.

Soit E un élément de A_1 . Le polynôme $P(V) = \prod_{\sigma \in \mathcal{G}} (V - E^\sigma)$ a ses coefficients dans A_0 . Posons

$$B_i(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \frac{T_i^\sigma}{V - E^\sigma} \quad C_i(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \frac{U_i^\sigma}{V - E^\sigma}$$

$$Q(X, V) = P(V) \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathcal{G} \\ \sigma \neq \tau}} \frac{F(X) - G^\sigma(X) H^\sigma(X)}{(V - E^\sigma)(V - E^\tau)}.$$

Ces polynômes sont à coefficients dans A_0 ; les polynômes $B_i(V)$, $C_i(V)$ sont de degré $\binom{n}{r} - 1$ et sont caractérisés par $B_i(E^\sigma) = P'(E^\sigma) T_i^\sigma$, $C_i(E^\sigma) = P'(E^\sigma) U_i^\sigma$ où σ parcourt les $\binom{n}{r}$ éléments de \mathcal{G} .

La formule d'interpolation de Lagrange entraîne:

$$P'(V) X^r - B_1(V) X^{r-1} + \dots + (-1)^r B_r(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \frac{G^\sigma(X)}{V - E^\sigma}$$

$$P'(V) X^{n-r} - C_1(V) X^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n-r} C_r(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \frac{H^\sigma(X)}{V - E^\sigma}.$$

En effet, dans chacune de ces deux lignes, les deux membres, qui sont des polynômes de degré $\binom{n}{r} - 1$ en V sur $A_0[X]$ prennent la même valeur quand on substitue à V les $\binom{n}{r}$ valeurs E^σ , où $\sigma \in \mathcal{S}$.

Un petit calcul conduit à l'identité:

$$(1) \quad P'^2(V) F(X) = \\ = [P'(V) X^r + \dots + (-1)^r B_r(V)] [P'(V) X^{n-r} + \dots + (-1)^{n-r} C_{n-r}(V)] + \\ + P(V) Q(V, X).$$

Remarquons enfin que le résultant de $G(X)$ et $H(X)$ divise $P'(E)$ dans l'anneau A_1 car $P'(E) = \prod_{\sigma \neq 1} (E - E^\sigma)$ « s'annule si $G(X)$ et $H(X)$ ont une racine commune ».

Comme tout anneau est quotient d'un anneau factoriel, les identités ci-dessus sont valables si l'on remplace A par un anneau commutatif à élément unité quelconque.

§ 2. — CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS

Soit A un anneau commutatif unitaire, \mathcal{A} un idéal de A , $\bar{A} = A/\mathcal{A}$ l'anneau quotient. On note \bar{a} l'image ou « reste » dans \bar{A} de l'élément a de A , \bar{f} l'image du polynôme f à coefficients de A , que nous appellerons le reste de f .

Si $\phi \in A$, on note A_ϕ l'anneau de fractions relatif à la partie multiplicative des puissances positives de ϕ ; on notera a_ϕ (resp. f_ϕ) l'image dans A_ϕ de l'élément $a \in A$ (resp. du polynôme f sur A).

Si, de plus, ϕ est inversible modulo \mathcal{A} , on a un diagramme commutatif canonique:

$$\begin{array}{ccc} & & A_\phi \\ & \nearrow & \downarrow \\ A & & \bar{A} \\ & \searrow & \end{array}$$

qui permet de parler du reste d'un élément de A_ϕ ou d'un polynôme à coefficients dans A_ϕ .

Proposition 1. — Les conditions suivantes sur le couple (A, \mathcal{A}) sont équivalentes:

- (i) Si f est un polynôme unitaire de $A[X]$ dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires \bar{g} et \bar{h} de résultant inversible, il