UNE CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS

Autor(en): **Crépeaux, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41551

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

UNE CARACTÉRISATION DES COUPLES HENSELIENS

par E. CRÉPEAUX

De façon sommaire, dire que l'anneau local d'un point t_0 d'une variété algébrique V est hensélien signifie que le théorème des fonctions implicites est vérifié en t_0 pour les relations algébriques $f(x, t) = 0$ où $t \in V$ et où x est la fonction inconnue à définir sur V, autrement dit si les relations $f(x_0, t_0) = 0$ et $f'_x(x_0, t_0)$ inversible permettent de définir une fonction $x(t)$ sur un voisinage de t_0 vérifiant la relation donnée et telle que $x(t_0) = x_0$.

Dans ce travail, nous étendons cette définition locale de Nagata [1], en adaptant légèrement celle de Lafon [2] au cas où l'on remplace un point par une partie fermée F de V. Nous nous sommes cru obligés, pour des questions techniques, d'introduire deux notions sensiblement voisines correspondant à deux façons d'envisager le théorème des fonctions implicites:

a) couple faiblement hensélien: on exige seulement que la relation $f(x, t) = 0$ vérifiée sur F (avec bien entendu une condition d'inversibilité sur f'_x) définisse un germe de fonctions implicites au voisinage de F,

b) couple hensélien: on exige en outre que la fonction implicite soit unique dans tout voisinage assez petit de F.

§ 1. — IDENTITÉ DE RAUZY

Soient $I = \{1, ..., n\}$ et $J = \{1, ..., r\}$ pour $r \in I$. On note $i \in I$, $(\sigma, i) \to i^\sigma$ l'opération du groupe $\mathscr{G}$ des permutations de I. Soit $\mathscr{H}$ le sous-groupe de $\mathscr{G}$ des permutations laissant J globalement invariant; le sous-groupe $\mathscr{H}^\sigma = \sigma \mathscr{H} \sigma^{-1}$ laisse alors J^σ globalement invariant. Soit $\mathscr{S}$ un système de représentants de $\mathscr{G}$ modulo la relation d'équivalence $''J^\sigma = J^{\sigma'}\,''$ $(\sigma, \sigma' \in \mathscr{G})$ $\mathscr{S}$ a alors $\binom{n}{r}$ éléments correspondant aux parties de r éléments de I; on suppose que $\mathscr{S}$ contient l'élément neutre de $\mathscr{G}$, correspondant à J.

Soient A un anneau factoriel, $X_1, ..., X_n, X, V$ des indéterminées.

On pose:

$$F(X) = \prod_{i \in I} (X - X_i) = X^n - S_1 X^{n-1} + ... + (-1)^n S_n .$$

On fait opérer $\mathscr{G}$ sur ces indéterminées par $(X_i)^\sigma = X_{i^\sigma}$, $X^\sigma = X$, $V^\sigma = V$, $\forall\, \sigma \in \mathscr{G}$. On pose $A_2 = A\,[X_1, ..., X_n]$. Les points fixes de A_2 par $\mathscr{G}$ forment le sous-anneau $A_0 = A\,[S_1, ..., S_n]$ des polynômes symétriques en $X_1, ..., X_n$.

Posons:

$$G(X) = \prod_{i \in J} (X - X_i) = X^r - T_1 X^{r-1} + \ldots + (-1)^r T_r$$

$$H(X) = \prod_{i \in I-J} (X - X_i) = X^{n-r} - U_1 X^{n-r-1} + \ldots + (-1)^{n-r} U_{n-r}.$$

Le sous-anneau de A_2 formé des points fixes par $\mathscr{H}$ est

$$A_1 = A_0\,[T_1, \ldots, T_r] = A_0\,[U_1, \ldots, U_{n-r}].$$

et le sous-anneau des points fixes par $\mathscr{H}^\sigma$ est donc

$$A_1^\sigma = A_0\,[T_1^\sigma, \ldots, T_r^\sigma] = A_0\,[U_1^\sigma, \ldots, U_{n-r}^\sigma].$$

On remarque:

$$G^\sigma(X) = \prod_{i \in J^\sigma} (X - X_i) = X^r - T_1^\sigma X^{r-1} + \ldots + (-1)^r T_r^\sigma$$

$$H^\sigma(X) = \prod_{i \in I-J} \sigma(X - X_i) = X^{n-r} - U_1^\sigma X^{n-r-1} + \ldots + (-1)^{n-r} U_{n-r}^\sigma.$$

On a, $\forall\, \sigma \in \mathscr{G}$, $G^\sigma(X)\, H^\sigma(X) = F(X)$.

Soit E un élément de A_1. Le polynôme $P(V) = \prod_{\sigma \in \mathscr{S}} (V - E^\sigma)$ a ses coefficients dans A_0. Posons

$$B_i(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} \frac{T_i^\sigma}{V - E^\sigma} \qquad C_i(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} \frac{T_i^\sigma}{V - E^\sigma}$$

$$Q(X, V) = P(V) \sum_{\substack{\sigma,\, \tau \in \mathscr{S} \\ \sigma \neq \tau}} \frac{F(X) - G^\sigma(X)\, H^\sigma(X)}{(V - E^\sigma)(V - E^\tau)}.$$

Ces polynômes sont à coefficients dans A_0 ; les polynômes $B_i(V)$, $C_i(V)$ sont de degré $\binom{n}{r} - 1$ et sont caractérisés par $B_i(E^\sigma) = P'(E^\sigma)\, T_i$, $C_i(E^\sigma) = P'(E^\sigma)\, U_i^\sigma$ où σ parcourt les $\binom{n}{r}$ éléments de $\mathscr{S}$.

La formule d'interpolation de Lagrange entraîne:

$$P'(V) X^r - B_1(V) X^{r-1} + \ldots + (-1)^r B_r(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} \frac{G^\sigma(X)}{V - E^\sigma}$$

$$P'(V) X^{n-r} - C_1(V) X^{n-r-1} + \ldots + (-1)^{n-r} C_r(V) = P(V) \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} \frac{H^\sigma(X)}{V - E^\sigma}.$$

En effet, dans chacune de ces deux lignes, les deux membres, qui sont des polynômes de degré $\binom{n}{r} - 1$ en V sur $A_0[X]$ prennent la même valeur quand on substitue à V les $\binom{n}{r}$ valeurs E^σ, où $\sigma \in \mathscr{S}$.

Un petit calcul conduit à l'identité:

$$(1)\quad P'^2(V)F(X) = \\ = [P'(V)X^r + \ldots + (-1)^r B_r(V)][P'(V)X^{n-r} + \ldots + (-1)^{n-r} C_{n-r}(V)] + \\ + P(V)Q(V, X).$$

Remarquons enfin que le résultant de $G(X)$ et $H(X)$ divise $P'(E)$ dans l'anneau A_1 car $P'(E) = \prod_{\sigma \neq 1} (E - E^\sigma)$ « s'annule si $G(X)$ et $H(X)$ ont une racine commune ».

Comme tout anneau est quotient d'un anneau factoriel, *les identités ci-dessus sont valables si l'on remplace* A *par un anneau commutatif à élément unité quelconque.*

§ 2. — Caractérisation des couples henseliens

Soit A un anneau commutatif unitaire, $\mathscr{A}$ un idéal de A, $\bar{A} = A/\mathscr{A}$ l'anneau quotient. On note $\bar{a}$ l'image ou « reste » dans $\bar{A}$ de l'élément a de A, $\bar{f}$ l'image du polynôme f à coefficients de A, que nous appellerons le reste de f.

Si $\phi \in A$, on note A_ϕ l'anneau de fractions relatif à la partie multiplicative des puissances positives de ϕ; on notera a_ϕ (resp. f_ϕ) l'image dans A_ϕ de l'élément $a \in A$ (resp. du polynôme f sur A).

Si, de plus, ϕ est inversible modulo $\mathscr{A}$, on a un diagramme commutatif canonique:

$$\begin{tikzcd} & A_\varnothing \arrow[d] \\ A \arrow[ur] \arrow[r] & \bar{A} \end{tikzcd}$$

qui permet de parler du reste d'un élément de A_ϕ ou d'un polynôme à coefficients dans A_ϕ.

Proposition 1. — Les conditions suivantes sur le couple $(A, \mathscr{A})$ sont équivalentes:

(i) Si f est un polynôme unitaire de $A[X]$ dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires $\bar{g}$ et $\bar{h}$ de résultant inversible, il

existe $\phi \in A$, de reste inversible, deux polynômes unitaires g et $h \in A_\phi[X]$, de restes respectifs $\bar{g}$ et $\bar{h}$, de résultant inversible tel que $f_\phi = gh$.

(ii) Si $p(V) = V^k - a_1 V^{k-1} - \ldots - a_k$ est un polynôme de $A[V]$ tel que $a_2, \ldots, a_k$ appartiennent à $\mathscr{A}$ et que $\bar{a}_1$ soit inversible, il existe $\phi \in A$ de reste inversible, et un élément $a \in A_\phi$, de reste $\bar{a}_1$, racine simple de $p(V)$ [i.e. $p_\phi(a) = 0$, $p'_\phi(a)$ inversible].

(iii) Si $p(V)$ est un polynôme unitaire de $A[V]$ dont le reste a une racine simple $\bar{e}$, il existe $\phi \in A$, de reste inversible, et une racine simple e, de $p_\phi(V)$ dans A_ϕ, de reste $\bar{e}$.

(iv) Si $q(U) = U^k - b_1 U^{k-1} - \ldots - b_k$ est un polynôme de $A[U]$ tel que $b_k \in \mathscr{A}$ et que $\bar{b}_{k-1}$ soit inversible, alors il existe $\phi \in A$, de reste inversible et un élément $d \in A_\phi$, de reste nul, racine simple de $q_\phi(U)$.

Démonstration. — Il est clair que (iii) entraîne (ii) et que (i) entraîne (iv). D'autre part, en opérant une translation sur U, on voit que (iv) entraîne (iii).

Montrons que (ii) entraîne (i).

Soit $f = X^n - s_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n s_n$ le polynôme donné. Soit $h_1 \in A[X]$ de reste $\bar{h}$. On pose $E = h_1(X_1) \ldots h_1(X_n)$. On en déduit, avec les notations du § 1, les polynômes $P(V)$, $B_i(V)$, $C_i(V)$, $Q(V, X)$. Par l'homomorphisme de A sur $\bar{A}$, ces polynômes sont transformés en $\bar{E}$, $\bar{P}$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$, Q. D'autre part, spécialisant S_i en s_i $(i \in I)$ on obtient, avec des notations évidentes $p(V)$, $b_i(V)$, $e_i(V)$, $q(V, X)$ qui, d'après le § 1, vérifient:

$$p'^2(V) f =$$

$$= \left[p'(V) X^r + \ldots + (-1)^r b_r(V)\right] \left[p'(V) X^{n-r} + \ldots + (-1)^{n-r} c_{n-r}(V)\right].$$

$$+ p(V) q(V, X).$$

Pour calculer le reste de $p(V)$, on introduit un anneau $\bar{B}$ contenant $\bar{A}$ et des x_i $(i \in I)$ tels que $\bar{g}(X) = \prod_{i \in J} (X - \bar{x}_i)$, $\bar{h}(X) = \prod_{i \in I - J} (X - \bar{x}_i)$. La substitution $X_i \to \bar{x}_i$ transforme $\bar{E}$ en le résultant inversible $\bar{e} = \bar{h}(\bar{x}_1) \ldots \bar{h}(\bar{x}_r)$ de $\bar{g}$ et $\bar{h}$, et, comme, pour $\sigma \neq 1$, $\bar{E}^\sigma$ est transformé en 0, on aura $\bar{p}(V) = V^{k-1}(V - \bar{e})$, où $k = \binom{n}{r}$.

Il existe, d'après (ii), un élément $\phi \in A$, de reste inversible, et un élément $e \in A_\phi$, de reste $\bar{e}$ tel que $p_\phi(e) = 0$ et que $p'_\phi(e)$ soit inversible. On a donc la décomposition dans A:

$$(2) \qquad f = \left[X^r - \frac{b_{1,\phi}(e)}{p'_\phi(e)} X^{r-1} + \ldots + (-1)^r \frac{b_{r,\phi}(e)}{p'_\phi(e)}\right] \cdot$$
$$\cdot \left[X^{n-r} - \frac{c_{1,\phi}(e)}{p'_\phi(e)} X^{n-r-1} + \ldots + (-1)^{n-r} \frac{c_{n-r,\phi}(e)}{p'_\phi(e)}\right].$$

Pour voir que les polynômes entre crochets ont, pour restes, $\bar{g}$ et $\bar{h}$, il suffit d'utiliser le fait que $\bar{B}_i(\bar{E}) = \bar{P}'(\bar{E})\, T_i$, $\bar{C}_i(\bar{E}) = \bar{P}'(\bar{E})\, U_i$ et la substitution $X_i \to \bar{x}_i$. La remarque faite en fin du § 1 entraîne que le résultant de ces deux polynômes est inversible.

Proposition 2. — Les conditions suivantes sur le couple $(A, \mathscr{A})$ sont équivalentes:

(i) Si f est un polynôme unitaire de $A[X]$ dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires $\bar{g}$ et $\bar{h}$ de résultant inversible, il existe $\phi \in A$ de reste inversible possédant la propriété suivante: il existe un couple de polynômes $g, h \in A_\phi[X]$ de restes respectifs $\bar{g}$ et $\bar{h}$, tel que $f_\phi = gh$. Le couple (g, h) est unique sous ces conditions et le résultant de g et h est inversible.

(ii) Si $p(V) = V^k - a_1 V^{k-1} - \ldots - a_k$ est un polynôme de $A[V]$ tel que $a_2, \ldots, a_k$ appartiennent à $\mathscr{A}$ et que $\bar{a}_1$ soit inversible, il existe un élément $\phi \in A$ de reste inversible possédant la propriété suivante: p_ϕ a dans A une racine de reste $\bar{a}$, unique sous ces conditions et simple.

(iii) Si $p(V)$ est un polynôme unitaire de $A[V]$ dont le reste a une racine simple $\bar{e}$, il existe $\phi \in A$ de reste inversible possédant la propriété suivante: p_ϕ a, dans A_ϕ, une racine de reste $\bar{e}$, unique sous ces conditions et simple.

(iv) Si $q(U) = U^k - b_1 U^{k-1} - \ldots - b_k$ est un polynôme de $A[U]$ tel que b_k appartienne à $\mathscr{A}$ et que $\bar{b}_{k-1}$ soit inversible, il existe $\phi \in A$, de reste inversible possédant la propriété suivante: q_ϕ a dans A_ϕ une racine de reste nul, unique sous ces conditions et simple.

Démonstration. — Ici encore il suffit de montrer que (ii) entraîne (i). On reprend la construction de la démonstration correspondante de la proposition 1. On part de $h_1 \in A[X]$, de reste $\bar{h}$, qui fournit le polynôme $p(V) \in A[X]$. L'élément ϕ de cette construction est choisi de manière à satisfaire les hypothèses (ii) ci-dessus, c'est-à-dire que p_ϕ a dans A_ϕ une racine e de reste $\bar{e}$, unique sous ces conditions, et simple.

Soit alors $f = gh$ une autre décomposition avec g et h de restes respectifs $\bar{g}$ et $\bar{h}$. On introduit un anneau B contenant A et des x_i $(i \in I)$ tels que $g = \prod_{i \in J} (X - x_i)$, $h = \prod_{i \in I - J} (X - x_i)$. Pour calculer $p_\phi(V)$, on utilise la spécialisa-

tion $X_i \to x_i$, de sorte que l'élément $h_1(x_1) \dots h_1(x_2)$ est racine de p_ϕ, et comme il a pour reste $\bar{e}$, il est nécessairement égal à e. Compte tenu des relations $P'(V) V_i(V) = T_i$, $P'(V) C_i(V) = U_i$, on voit alors que la décomposition $f = gh$ n'est autre que celle obtenue par l'identité (2), ce qui en montre l'unicité.

Remarque. — Si ϕ possède la propriété ci-dessus, il en est de même de tout élément $\phi\theta$, où $\bar{\theta}$ est inversible.

Définition. — Un couple vérifiant les conditions de la proposition 1 (resp. 2) sera dit faiblement hensélien (resp. hensélien).

Remarque. — Nous ne gardons pas ici les définitions de J.P. Lafon mais nous allons voir ci-dessous que dans les cas usuels les notions coïncident.

§ 3. — Propriétés élémentaires

1. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple tel que $\mathscr{A}$ soit contenu dans le radical (de Jacobson) ou intersection des idéaux maximaux de A (il revient au même de dire qu'un élément de A est inversible dès que son reste l'est. Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien, alors il est hensélien. On retrouve alors la définition de Lafon.

Tout d'abord les éléments ϕ intervenant dans les énoncés des propositions peuvent être choisis égaux à 1. Il reste à voir l'unicité de la décomposition de f sous les hypothèses de (1) prop. 2. La démonstration faite dans le cas local dans [1] s'étend sans modification:

Si $f = gh = g_1h_1$ avec $\bar{g} = \bar{g}_1$, $\bar{h} = \bar{h}_1$, g et h_1 ont un résultant inversible puisqu'il en est de même de leur reste. Il existe alors $u, v \in A[X]$ tels que $ug + vh_1 = 1$, soit $ugh + vh_1h = h$, d'où $(ug_1 + vh)\, h_1 = h$; le polynôme h_1 divise h; de même h divise h_1; ces polynômes étant unitaires, on a $h = h_1$ et de même, $g = g_1$.

2. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple et $\phi \in A$ de reste inversible; les éléments de A_ϕ de reste nul forment l'idéal $\mathscr{A}_\phi$ des fractions $a/\mathscr{A}_\phi{}^p$ où $a \in \mathscr{A}$, $p \in N$.

Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien ou hensélien, il en est de même de $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$.

Supposons $(A, \mathscr{A})$ faiblement hensélien, et soit $p(V) = V^k - b_1V^{k-1} - \dots - b_k$ un polynôme sur A_ϕ où $\bar{b}_1$ est inversible et où $b_1, \dots, b_k \in \mathscr{A}_\phi$. En prenant l'entier m assez grand, on peut écrire

$$p(V) = V^k - \frac{a}{\phi^m} V^{k-1} - \dots - \frac{a_k}{\phi^{km}}$$

où $a_1 \in A$ a un reste inversible et où $a_2, \ldots, a_k \in \mathscr{A}$. Supposons que $p(V)$ a une racine simple $\bar{e}$ dans $\bar{A}$, mais alors, il existe ψ tel que $W^k - a_1 W^{k-1} - \ldots - a_k$ ait une racine simple dans A_ψ, de reste $\bar{e}$, et par suite, l'image de $p(V)$ dans $A_{\phi\psi}$ a une racine simple, de reste $\bar{e}$. $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ est donc faiblement hensélien. On laisse au lecteur le soin de voir que $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ est hensélien si $(A, \mathscr{A})$ l'est.

3. — On considère la catégorie (Cou) dont les objets sont les couples $(A, \mathscr{A})$ d'un anneau A et d'un idéal $\mathscr{A}$ de A, un morphisme $u : (A, \mathscr{A}) \to (B, \mathscr{L})$ étant un homomorphisme $u: A \to B$ d'anneaux tel que $u^{-1}(\mathscr{L}) = \mathscr{A}$. On sait alors [2] que si $((A_i, \mathscr{A}_i)_{i \in I}\, u_{ij})$ est un système inductif dans (Cou) indexé par un ensemble I filtrant, il a une limite inductive $(A, \mathscr{A})$ dans (Cou) où A est la limite inductive des A_i dans la catégorie des anneaux et où $\mathscr{A}$ est la limite inductive des idéaux $\mathscr{A}_i$. Si, de plus, les couples $(A_i, \mathscr{A}_i)$ sont faiblement henséliens, ou henséliens, il en est de même de $(A, \mathscr{A})$ [On adapte sans difficulté la démonstration de Lafon aux définitions ci-dessus].

4. — En particulier, si $(A, \mathscr{A})$ est un couple faiblement hensélien, on considère le système inductif filtrant des $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$ où ϕ parcourt la partie multiplicative S de A formée des éléments inversibles modulo $\mathscr{A}$, alors sa limite inductive $(A_S, \mathscr{A}_S)$ sera faiblement hensélienne, et même hensélienne, puisque $\mathscr{A}_S$ est contenu dans le radical de A_S.

Cela entraîne en particulier que si $f_\phi = gh$ et $f_\psi = g_1 h_1$ sont deux décompositions d'un polynôme $f \in A\,[X]$ dans A_ϕ et A_ψ respectivement et vérifiant les hypothèses de (1), prop. 1, alors, en prenant θ « assez grand » de reste inversible, ces deux décompositions ont la même image dans A_θ, ce que l'on aurait pu voir directement.

En résumé, dire que $(A_S, \mathscr{A}_S)$ est hensélien équivaut à dire que $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien. On reconnaît une généralisation de [1] chap. VII prop. 43; 2). Nous rappelons que pour Nagata, un anneau local A, d'idéal maximal $\mathscr{M}$ est hensélien si le couple $(A, \mathscr{M})$ est faiblement hensélien au sens où nous l'entendons ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NAGATA, M. *Local rings*. Interscience Publishers.
[2] LAFON, J. P. *Anneaux henséliens*. Bull. Soc. Math. France (1964).
[3] ARTIN, M. *Grothendieck Topologies*. Harvard University (1962).

E. Crépeaux
Faculté des Sciences de Lille

(Reçu le 1er juin 1968)

vide-leer-empty