

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** JACQUES HADAMARD, SA VIE ET SON ŒUVRE CALCUL FONCTIONNEL ET QUESTIONS DIVERSES  
**Autor:** Lévy, Paul  
**Kapitel:** III  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41524>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

holm d'établir la convergence des séries à l'aide desquelles il a résolu sa célèbre équation intégrale.

Ce théorème n'est d'ailleurs pas sa seule contribution à l'algèbre. Un mémoire sur l'élimination le conduit à des démonstrations élémentaires de théorèmes établis par Humbert, Appell et Goursat à l'aide des fonctions fuchsiennes et abéliennes. Dans un autre mémoire, il signale une lacune dans la démonstration classique de l'impossibilité de la résolution de l'équation du cinquième degré. Deux autres mémoires portent sur les conditions de décomposition des formes. Tout cela de 1894 à 1897. Il reviendra à l'algèbre en 1911 pour rédiger, en collaboration avec M. Kûrschak, l'important chapitre de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (éd. française) consacré à la théorie des corps et domaines algébriques.

Mentionnons encore une extension des théorèmes de Paul Dubois-Reymond sur la croissance des fonctions. C'est Hadamard, et non Paul Dubois-Reymond, qui a démontré qu'on peut toujours définir une série convergente (divergente) qui converge (diverge) moins rapidement que toutes les séries d'une suite dénombrable de séries convergentes (divergentes) données, et que, si  $f(n)$  est une fonction positive et indéfiniment croissante de  $n$ , on peut toujours trouver une série divergente  $\sum u_n$  et une série convergente  $\sum v_n$  telles que  $0 < u_n < v_n f(n)$ .

Mentionnons enfin, pour en finir avec ces questions diverses, un mémoire de 1906 sur les transformations ponctuelles, où il étudie les conditions d'unicité d'une telle transformation, et un mémoire de 1910 sur l'indice de Kronecker, qui généralise cet indice, et qui en même temps, dans le cas du plan, apporte une simplification à la démonstration du théorème de Jordan d'après lequel une courbe plane fermée sans point double divise le plan en deux régions.

### III

Arrivons maintenant à un ensemble de travaux beaucoup plus important, concernant le calcul des variations et le calcul fonctionnel. On sait qu'Hadamard a donné le nom de fonctionnelle à une expression:  $U[x(t)]$  qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction  $x(t)$  dans un intervalle (fini ou infini). Le calcul fonctionnel, au sens de Volterra et Hadamard, est l'étude de ces fonctionnelles (nous n'avons pas à parler ici de l'analyse générale, créée par M. Fréchet et E. H. Moore, et qu'on appelle souvent analyse fonctionnelle; il est regrettable que la terminologie de M. Fréchet n'ait pas été conservée). Volterra s'était d'abord placé au point de vue

géométrique, en étudiant les fonctions de lignes. En ramenant l'étude des fonctions de lignes ou de surfaces à l'étude analytique des fonctionnelles, Hadamard a réalisé un progrès analogue à celui que Descartes a réalisé en créant la géométrie analytique.

Dans sa notice de 1912, il indique que les progrès de l'analyse et sa tendance à l'énoncé de problèmes de plus en plus généraux, devaient nécessairement conduire à l'analyse fonctionnelle. Après les fonctions particulières connues depuis longtemps, Leibniz et ses successeurs avaient étudié des fonctions de plus en plus générales d'une ou de plusieurs variables. Il était fatal qu'on étudie un jour les fonctions d'une infinité de variables, et, comme une fonction continue dans un intervalle fini y est bien définie par ses coefficients de Fourier, les fonctions de ces coefficients sont en réalité des fonctionnelles. Avant Volterra, Carlo Bourlet et surtout S. Pincherle avaient étudié la relation entre une fonction analytique  $f(x)$  définie par une série entière  $\sum a_n x^n$ , et une autre fonction  $g(x)$  dont la forme dépend de tous les  $a_n$ ;  $g(x)$  est donc en réalité une fonctionnelle qui dépend de la fonction  $f(\cdot)$  et accessoirement du paramètre  $x$ . Le mérite de Volterra fut d'abord de s'être débarrassé du paramètre accessoire  $x$ , ensuite et surtout d'avoir compris que l'étude générale des fonctionnelles ne devait pas dépendre d'un mode particulier de représentation de la fonction dont elles dépendent. Son premier résultat fondamental montre bien l'intérêt de ce point de vue. Traduit dans le langage d'Hadamard, c'est que, si une fonctionnelle  $U$  dépend des valeurs de  $x(t)$  dans un intervalle  $(a, b)$ , et si on donne à  $U$  une variation infinitésimale  $\delta x(t)$ , la variation correspondante de  $U$  est, sous des conditions assez peu restrictives, de la forme

$$\delta U = \int_a^b U'_x \delta x(t) dt, \quad (1)$$

l'erreur étant, comme dans la définition d'une différentielle, un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Le coefficient  $U'_x = U'_x(t)$ , qu'on appelle la dérivée fonctionnelle de  $U$ , est naturellement en général une fonctionnelle de  $x(\cdot)$ , dépendant en outre de  $t$ .

Il était évident que la forme (1) de Volterra ne s'applique pas à n'importe quelle fonctionnelle. Si  $U = x(\tau)$  ( $\tau$  étant un point donné dans  $(a, b)$ ),

alors  $\delta U = \delta x(\tau)$ . De même, si  $U$  est le maximum de la fonction  $x$ , supposée continue dans  $(a, b)$ , et si ce maximum n'est atteint qu'en un point  $\tau$ , on a  $\delta U = \delta x(\tau)$ . S'il est atteint en plusieurs points  $\tau_i$ , c'est le plus grand des

$\delta x(\tau_i)$  qui intervient, et  $\delta U$  cesse d'être une fonctionnelle linéaire. Si on considère une famille de fonctions  $x(t) = f(t, \lambda)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda$ , et si  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$  est une fonction continue de  $t$  et  $\lambda$ ,  $U$  devient une fonction  $F(\lambda)$  qui est en général dérivable. Mais s'il arrive que pour une valeur  $\lambda_0$  de  $\lambda$  le maximum de  $x(t)$  soit atteint pour deux (ou plus de deux) valeurs distinctes de  $t$ , alors, pour  $\lambda = \lambda_0$ ,  $F(\lambda)$  a une dérivée à droite et une dérivée à gauche qui sont en général distinctes.

Hadamard fut le premier à remarquer que la forme de Volterra n'est pas assez générale, et utilisa cette remarque de deux manières différentes. D'une part, considérant que l'accroissement infinitésimal de  $U$  n'a le caractère d'une différentielle que s'il est une fonctionnelle linéaire de  $\delta x(t)$ , il chercha la forme générale de ces fonctionnelles, et montra que n'importe quelle fonctionnelle linéaire  $U$  d'une fonction  $x(t)$  est limite d'intégrales de la forme

$$I_n = \int f_n(t) x(t) dt. \quad (2)$$

La représentation d'une fonctionnelle linéaire ainsi obtenue a le défaut de n'être pas canonique: elle donne une infinité de représentations différentes pour une même fonctionnelle. Mais ce résultat provoqua de nouvelles recherches qui mirent en évidence le fait qu'on ne peut obtenir de représentations canoniques qu'en précisant le champ fonctionnel  $E$  dans lequel  $U$  est supposé bien défini et borné, et par suite continu. En prenant pour  $E$  l'ensemble  $C$  des fonctions continues dans  $[a, b]$ , Fr. Riesz obtint l'expression canonique

$$U = \int_a^b x(t) dF(t), \quad (3)$$

$F(t)$  étant à variation bornée dans  $[a_-, b_+]$ . Ensuite, prenant pour  $E$  l'ensemble  $L_2$  des fonctions mesurables et de carrés sommables dans  $(a, b)$ , Fr. Riesz lui-même et M. Fréchet, indépendamment l'un de l'autre, obtinrent la représentation canonique

$$U = \int_a^b f(t) x(t) dt \quad [f \in L_2(a, b)]. \quad (4)$$

Bien entendu dans (3),  $F(t)$  est défini à une constante près, et, dans (4),  $f(t)$  peut être modifié arbitrairement sur n'importe quel ensemble de mesure nulle.

Revenons aux fonctionnelles linéaires continues dans  $C$ . Si la fonction  $F(t)$  qui intervient dans (3) n'est pas absolument continue, cela veut dire qu'il y a des points singuliers, formant un ensemble de mesure nulle, tels que  $U$  dépende spécialement des valeurs de  $x(t)$  en ces points. Si on exclut l'existence de tels points, l'expression (3) se réduit à la forme (4),  $f(t)$  étant seulement une fonction quelconque dans  $L_1$ , et non dans  $L_2$ . S'il y a un seul point singulier  $\tau$ ,  $U$  étant une fonctionnelle linéaire continue dans  $C$ , on est conduit à écrire

$$U = \int_a^b f(t) x(t) dt + cx(t). \quad (5)$$

la fonction  $f(t)$  pouvant avoir en  $\tau$  une discontinuité qui oblige à remplacer l'intégrale par sa valeur principale au sens d'Hadamard<sup>1)</sup>.

Ces circonstances se présentent presque toujours lorsqu'on étudie la variation d'une fonctionnelle non linéaire  $U$ . Même si aucune valeur de  $t$  ne joue un rôle particulier dans sa définition, la dérivée fonctionnelle  $U'_x(t)$  n'est pas en général une constante, et on peut, comme Hadamard l'a fait remarquer dès 1902, s'attendre à ce que  $\delta U'_x(t)$  dépende spécialement de  $\delta x(t)$ . Si la fonctionnelle  $U$  est continue d'ordre zéro et qu'aucun point ne joue un rôle particulier dans sa définition, on peut s'attendre à ce que  $\delta U'_x(t)$  ait la forme que j'ai appelée normale

$$\delta U'_x(t) = \int_a^b U''_{xx_1}(t, t_1) \delta x(t_1) dt_1 + U''_{x_2} \delta x(t), \quad (6)$$

ce qui, en supposant  $\delta^2 x(t) = 0$ , donne pour  $\delta^2 U$  la forme normale

$$\delta^2 U = \int_a^b \int_a^b U''_{xx_1}(t, t_1) \delta x(t) \delta x_1(t_1) dt dt_1 + \int_a^b U''_{x_2}(t) [\delta x(t)]^2 dt. \quad (7)$$

Volterra avait négligé le second terme sans s'apercevoir que les fonctionnelles qu'il considérait comme générales ne sont en réalité que des solutions de l'équation  $U''_{x_2} = 0$ , et cru que l'équation de Laplace ( $\Delta u = 0$ ) se généralisait par l'équation

<sup>1)</sup> Dans des applications importantes,  $t$  est une abscisse curviligne sur une courbe fermée. S'il n'en est pas ainsi, et si  $a$  et  $b$  sont finis, il faut naturellement en général introduire des termes en  $\delta x(a)$  et  $\delta x(b)$ .

$$\int_a^b U''_{xx_1}(t, t_1) dt = 0$$

[alors que  $U''_{xx_1}(t, t_1)$  est une fonction mesurable de deux variables dont l'intégrale sur la ligne  $t = t_1$  ne peut jouer aucun rôle]. En réalité, comme cela résulte des travaux de Gâteaux et des miens, l'équation de Laplace généralisée est

$$\int_a^b U''_{x^2}(t) dt = 0 \quad (8)$$

Ces travaux, comme ceux de Gâteaux et de M. Fréchet qui ont étudié les solutions de l'équation  $U''_{x^2} = 0$  auxquelles s'appliquent les formules de Volterra, apparaissent un peu comme des développements de la courte note d'Hadamard (*Bull. Soc. math.*, 30, 1902, pp. 40-43).

#### IV

Si Hadamard s'intéressait aux théories générales (il s'est en particulier beaucoup intéressé à l'analyse générale de Fréchet et Moore), cela ne l'empêchait pas d'attacher une grande importance aux applications. Dans sa notice de 1912, il fait remarquer que, dans ses travaux sur les fonctions entières, il s'était déjà inspiré des principes du calcul fonctionnel: il avait en effet étudié les relations entre trois fonctions, celle qui caractérise la croissance d'une fonction entière, celle qui définit la décroissance des coefficients de la série entière qui la représente, et celle qui définit le nombre de ses zéros de modules  $\leq r$ . Mais en 1907, un sujet mis au concours par l'Académie, l'étude de l'équilibre des plaques élastiques encastrées, lui donna l'occasion d'appliquer plus précisément les idées de Volterra, en considérant les fonctions de Green comme fonctions du contour. On sait que ces fonctions dépendent, dans le cas du plan, d'un contour  $C$  et de deux points intérieurs  $A$  et  $B$ . Il en considéra spécialement trois: la fonction de Green proprement dite,  $g(A, B)$ , relative à l'équation de Laplace et au problème de Dirichlet; la fonction de Neumann  $\gamma(A, B)$ , relative à la même équation de Neumann; enfin la fonction de Green d'ordre deux,  $G(A, B)$ , dont dépend l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Il dut d'abord préciser la définition de  $\gamma(A, B)$  que Neumann n'avait, pour chaque  $A$  fixe, défini qu'à une constante près. Il put le faire de manière que cette fonction soit, comme les deux autres, symétrique en  $A$  et  $B$ . Supposant