

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE COMPARÉE DE CERTAINS ANNEAUX COMMUTATIFS
Autor: Lafon, Jean-Pierre
Kapitel: II. Les exemples les plus importants
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41550>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

On peut compléter l'espace métrique sous-jacent à $A/\cap m^n$, obtenant un espace métrique noté \hat{A} qui contient $A/\cap m^n$ comme sous espace partout dense. Le fait que les applications de $(A/\cap m^n)^2$ dans $(A/\cap m^n)$ qui définissent les lois de composition dans $A/\cap m^n$ sont uniformément continues permet de les prolonger par continuité en des applications de $(\hat{A})^2$ dans \hat{A} définissant des lois de composition sur \hat{A} . On vérifie que \hat{A} est ainsi muni d'une structure d'anneau local de même corps résiduel que A . Cet anneau local est appelé le *complété séparé de l'anneau local A* .

Si l'idéal maximal m de A est de type fini, on montre que ce complété séparé est *noethérien et d'idéal maximal $m \cdot \hat{A}$* (idéal engendré par m dans \hat{A} , i.e. $(m/\cap m^n) \hat{A}$.)

Si l'anneau A est noethérien (et, donc, aussi \hat{A}), l'anneau \hat{A} est *fidèlement plat sur A* :

ceci peut se traduire sous la forme suivante peut-être plus intuitive pour un non initié : si (1) $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i$ ($i=1, \dots, n$) est un système d'équations linéaires à coefficients dans A , toute solution $(x_j)_j$ dans \hat{A}^m est combinaison linéaire à coefficients dans \hat{A} de solutions dans A^m .

II. LES EXEMPLES LES PLUS IMPORTANTS

Ils sont de quatre type.

1. Les anneaux de la géométrie algébrique classique

On considère un corps k et n indéterminées X_1, \dots, X_n . L'anneau « type » est l'anneau

$$k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$$

des fractions rationnelles

$$\frac{f(X_1, \dots, X_n)}{g(X_1, \dots, X_n)} \quad \text{où } f(X_1, \dots, X_n) \text{ et } g(X_1, \dots, X_n)$$

sont des polynômes tels que $g(0, \dots, 0)$ soit non nul.

Si k est le corps des réels ou le corps des complexes (ou tout autre corps valué complet non discret ou topologique), cet anneau s'identifie à l'anneau des germes de fonctions rationnelles au voisinage de 0 dans k^n (muni de la topologie produit). Dans le cas général, on peut munir k^n d'une topologie moins fine que la topologie naturelle mais rendant les mêmes services.

Les anneaux de la géométrie algébrique classique sont les quotients de ces anneaux. Ils sont locaux de corps résiduel k .

2. Les anneaux de la géométrie formelle

Il s'agit ici d'un point de vue purement algébrique, aucun point de vue fonctionnel ne pouvant être développé.

L'anneau type est l'anneau $k[[X_1, \dots, X_n]]$ des séries formelles à coefficients dans le corps k en les indéterminées X_1, \dots, X_n . C'est un anneau *local*, car une série formelle est inversible si et seulement si son terme constant est non nul, de corps résiduel k , et *complet*. On vérifie qu'il est le complété de l'anneau type précédent. Les anneaux locaux qui interviennent en géométrie formelle sont les anneaux quotients des anneaux types. Il est possible de les caractériser intrinsèquement comme les anneaux locaux complets de corps résiduel k admettant un sous-corps isomorphe à k et noethériens.

3. Les anneaux de la géométrie analytique

Le corps k est *valué complet non discret* (plus précisément tel que la valuation définisse une topologie non discrète): par exemple, le corps \mathbf{R} des réels, le corps \mathbf{C} des complexes ou le corps \mathbf{Q}_p des nombres p -adiques.

On note $k\{\{X_1, \dots, X_n\}\}$ le sous-anneau de $k[[X_1, \dots, X_n]]$ des séries convergentes, i.e. des séries $\sum a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ pour lesquelles on peut trouver deux nombres positifs h et M tels que

$$|a_{i_1 \dots i_n}| \leq M h^{i_1 + \dots + i_n}$$

(M et h dépendant de la série).

C'est aussi un anneau local de corps résiduel k et dont le complété est l'anneau $k[[X_1, \dots, X_n]]$ des séries formelles.

Les anneaux locaux de la géométrie analytique sont les quotients d'anneaux de ce type. Ils sont appelés *k -algèbres analytiques*.

On remarque que l'anneau $k\{\{X_1, \dots, X_n\}\}$ s'identifie à l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage de 0 dans k^n (à un germe de fonction analytique on fait correspondre sa série de Taylor).

4. Les anneaux locaux de la géométrie différentielle

Ici le corps de base est le corps \mathbf{R} des nombres réels. On désigne (avec B. Malgrange) par \mathcal{E}_n l'anneau des germes de fonctions de classe C^∞ au voisinage de 0 de k^n . A un tel germe il est possible de faire correspondre sa

série de Taylor formelle: si \bar{f} est un tel germe, on note f une fonction de classe C^∞ dans un voisinage de 0 dans k^n représentant \bar{f} et on définit

$$\frac{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}}{\partial^{i_1 + \dots + i_n}} \bar{f}(0)$$

comme la dérivée correspondante à l'origine de f ; la série de Taylor formelle de \bar{f} est la série

$$\sum \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n}}{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}} \bar{f}(0) \frac{X_1^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{X_n^{i_n}}{i_n!}$$

Un théorème classique d'E. Borel affirme que l'homomorphisme ainsi défini de \mathcal{E}_n dans l'anneau $k[[X_1, \dots, X_n]]$ est *surjectif*.

Comme l'anneau $k[[X_1, \dots, X_n]]$ est complet, on voit qu'il est le séparé complété de \mathcal{E}_n .

Le noyau de l'homomorphisme surjectif $\mathcal{E}_n \rightarrow k[[X_1, \dots, X_n]]$ est l'idéal des germes de *fonctions plates* (exemple, en une variable, $x \rightarrow x^k e^{-1/x^2}$). Si m est l'idéal maximal de \mathcal{E}_n , ce noyau est, évidemment, $\cap m^n$. L'anneau \mathcal{E}_n n'est donc pas noethérien. Toutefois, l'idéal m est de type fini engendré par les germes des fonctions coordonnées. Les quotients des anneaux \mathcal{E}_n sont appelés *algèbres différentiables*.

III. THÉORÈME DE PRÉPARATION:

WEIERSTRASS. MALGRANGE

Cas formel.

Une série $f(X_1, \dots, X_n) \in k[[X_1, \dots, X_n]]$ est dite *régulière d'ordre s en X_n* si, en l'ordonnant par rapport à X_n , $f(X_1, \dots, X_n) = f_0(X_1, \dots, X_{n-1}) + \dots + f_{s-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^{s-1} + f_s(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^s + \dots$, les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\begin{cases} f_0(0, \dots, 0) = \dots = f_{s-1}(0, \dots, 0) = 0 \\ f_s(0, \dots, 0) \neq 0 \end{cases}$$

Si le corps k est de caractéristique 0 ou si $s = 1$ ceci se traduit par les conditions:

$$f(0, \dots, 0) = \dots = \frac{\partial^{s-1} f}{\partial X_n^{s-1}}(0, \dots, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^s f}{\partial X_n^s}(0, \dots, 0) \neq 0$$