

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MODULES PROJECTIFS, MODULES INJECTIFS  
GÉNÉRALISATIONS  
**Autor:** Maury, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41549>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# MODULES PROJECTIFS, MODULES INJECTIFS GÉNÉRALISATIONS

par G. MAURY

Je voudrais exposer de façon succincte, après un bref historique, les résultats obtenus par une équipe de chercheurs de la Faculté des Sciences de Lyon sur le thème « Modules projectifs, Modules injectifs. Généralisations ». Je rappelle que c'est en 1940 que Baer a introduit la notion de module projectif et celle de module injectif [1]. Ces notions ont donné lieu depuis à de très nombreux mémoires: dans son livre [2] *Report on injective modules* (1966), Tsai Che T. donne une bibliographie sur les modules injectifs comportant environ quatre-vingt-dix mémoires.

## 1. Plusieurs généralisations sont intervenues par la suite:

*Module de Baer*: Un  $A$ -module à gauche  $M$  est dit un module de Baer si pour tout idéal à gauche  $I$  de  $A$  et pour tout homomorphisme  $f: I \rightarrow A$  il existe un élément  $x$  de  $M$  tel que, quel que soit  $i$  appartenant à  $I$ ,  $f(i) = ix$ .

Baer a montré que si  $A$  possède un élément unité et si  $M$  est unitaire il y a identité entre les notions de  $A$ -module à gauche injectif et celle de  $A$ -module à gauche de Baer. Par contre si  $A$  ne possède pas d'élément unité ou si  $M$  n'est pas unitaire, la notion de module de Baer constitue une généralisation stricte de celle de  $A$ -module injectif [Faith et Utumi (3), 1964].

*Module quasi-injectif*: Johnson et Wong [(4), 1961] ont introduit la notion de module quasi-injectif: un  $A$ -module à gauche  $M$  est quasi-injectif, si quel que soit le sous-module  $N$  de  $M$  et quel que soit  $f$  homomorphisme de  $N$  dans  $M$  il existe un endomorphisme de  $M$  qui prolonge  $f$ . La notion de module quasi-injectif constitue une généralisation stricte de la notion de module injectif. Elle a donné lieu à un certain nombre de mémoires principalement japonais et français [Myashita (18), Harada (19), N. Chaptal (20), Wong (21)...].

*Module  $\Sigma$ -injectif*: Sanderson [(17), 1965] considère une famille non vide  $\Sigma$  d'idéaux à gauche de l'anneau unitaire  $A$ . Un  $A$ -module unitaire  $M$  est dit  $\Sigma$ -injectif si quel que soit l'homomorphisme  $f$  d'un idéal à gauche  $I$

quelconque mais appartenant à la famille  $\Sigma$  dans  $M$ , il existe un homomorphisme  $g$  de  $A$  dans  $M$  qui prolonge  $f$ . Si l'on prend pour  $\Sigma$  la famille de tous les idéaux à gauche de  $A$ , les notions de module «  $\Sigma$ -injectif » et de module « injectif » coïncident. Soit  $P$  un  $A$ -module à gauche, Sanderson définit un sous-module  $N$   $\Sigma$ -essentiel dans  $P$  (notation:  $N \triangleleft_{\Sigma} P$ ):

$$N \triangleleft_{\Sigma} P \Leftrightarrow \forall x \in P, I_N(x) = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\} \in \Sigma \text{ et } I_N(x) \cdot x \neq 0$$

si  $x \neq 0$ . Si l'on prend pour  $\Sigma$  la famille de tous les idéaux à gauche de  $A$ , la relation  $\triangleleft_{\Sigma}$  coïncide avec la relation d'essentialité  $\triangleleft$  bien connue.

*Module semi-injectif au sens de Govorof*: Govorof [(5), 1963] définit un  $A$ -module à gauche semi-injectif de la façon suivante:  $M$  est semi-injectif si quel que soit le sous-module  $N$  de  $M$ , tout endomorphisme  $f$  de  $N$  se prolonge en un endomorphisme de  $M$ . Govorof établit que cette notion est une généralisation stricte de celle de module quasi-injectif.

*Modules stables par les endomorphismes idempotents de leur enveloppe injective*: considérés par G. Renault [(6), 1966]. Comme les modules quasi-injectifs peuvent être caractérisés par la propriété d'être stables par les endomorphismes de leur enveloppe injective ce sont des modules particuliers de ce type.

*Module plat*: La notion de module plat a été introduite par J. P. Serre [(7), 1955]: un  $A$ -module à gauche  $M$  est plat si le foncteur  $\cdot \otimes_A M$  de la catégorie des  $A$ -modules à droite dans celle des  $Z$ -modules est exacte. Tout module projectif est plat.

*Module quasi-projectif*: cette notion introduite par Myashita [(8), 1966] constitue une généralisation stricte de la notion de module projectif: c'est la notion duale de celle de module quasi-injectif: un  $A$ -module à gauche  $M$  est quasi-projectif si étant donné un module quotient  $M/N$  de  $M$  et un  $A$ -homomorphisme  $f$  de  $M$  dans  $M/N$  il existe un endomorphisme  $h$  de  $M$  tel que  $\tau h = f$ ,  $\tau$  étant l'épimorphisme canonique de  $M$  sur  $M/N$ .

Citons enfin pour mémoire la notion de module fidèlement injectif introduite par B. Ballet [(22), 1968].

2. Parallèlement à ces généralisations, s'est développé un autre type de généralisations, consistant à étudier les objets projectifs et les objets

injectifs dans des catégories autres que celles des modules. Citons dans cette voie, d'abord la thèse de P. Gabriel [(18), 1962] où la notion d'enveloppe injective est définie et étudiée dans une catégorie de Grothendick à générateur, le travail de Z. Semadeni [(9), 1963] qui vise à déterminer les objets injectifs, respectivement projectifs dans certaines catégories topologiques usuelles [cf. aussi M. Hacque (10), 1964], une note de A. Daigneault [(23), 1968] donnant des conditions suffisantes sur une catégorie pour que chaque objet y admette une enveloppe injective.

3. Nous avons obtenu, à Lyon, des généralisations dans chacune des deux directions précédentes et aussi dans une troisième direction dont nous parlerons pour terminer. Dans la première direction, signalons les travaux suivants:

Ravel [(11), 1966] a défini les modules semi-injectifs (respectivement semi-projectifs): un  $A$ -module à gauche  $M$  sera dit semi-injectif (au sens de Ravel) si lorsque  $M$  est sous-module d'un module  $M'$ , il existe un épimorphisme de  $M'$  sur  $M$ . La notion de « module semi-projectif » est duale. Un module injectif (respectivement projectif) est semi-injectif (respectivement semi-projectif) mais la réciproque n'est pas exacte: par exemple l'anneau  $A = \mathbb{Z}/4$  considéré comme  $A$ -module est semi-injectif sans être injectif et semi-projectif sans être projectif. Plusieurs propriétés de ces modules sont données par Ravel au chapitre 3 de sa thèse de spécialité [11] Par ailleurs, dans un travail non encore publié, Ravel introduit et étudie les couples quasi-injectifs de modules: un couple  $(M, M')$  de  $A$ -modules à gauche est quasi-injectif si, pour tout sous-module  $N$  de  $M$  et tout homomorphisme  $f: N \rightarrow M'$ , il existe un homomorphisme de  $M$  dans  $M'$  qui prolonge  $f$ . Dire que  $(M, M)$  est un couple quasi-injectif équivaut à dire que  $M$  est un module quasi-injectif.

J'ai étendu [(14), 1968] les propriétés démontrées par G. Renault dans sa thèse [(6), 1966] pour les compléments d'un module donné, aux  $\Sigma$ -compléments d'un module donné: nous avons défini plus haut un sous-module  $P$   $\Sigma$ -essentiel dans un module  $M$  (notation  $P \triangle_{\Sigma} M$ ),  $M$  est dit aussi extension  $\Sigma$ -essentielle de  $P$ . Nous dirons qu'un sous-module  $P$  de  $M$  est un  $\Sigma$ -complément de  $M$  si  $P'$  sous-module de  $M$ ,  $P \triangle_{\Sigma} P'$ , entraînent  $P = P'$ .

Dans le même travail, je définis et étudie les modules  $\Sigma$ -quasi-injectifs, qui généralisent les modules quasi-injectifs: un module  $M$  est dit  $\Sigma$ -quasi-injectif, si quel que soit le sous-module  $N$  de  $M$  avec  $N \triangle_{\Sigma} M$  et quel que soit

l'homomorphisme  $f: N \rightarrow M$  il existe un endomorphisme  $g$  de  $M$  qui prolonge  $f$ .

J. Dazord [(15), 1966] a étudié les anneaux linéairement filtrés de Gelfand, c'est-à-dire des anneaux commutatifs à élément unité munis d'une filtration linéaire compatible telle que le radical de Jacobson est ouvert: les anneaux de Zarisky en constituent un cas particulier. Dazord étend à ces anneaux des propriétés des anneaux de Zarisky et étudie le complété  $\hat{A}$  de  $A$  en tant qu' $A$ -module au point de vue de la platitude et de la fidèle platitude.

Dans la deuxième direction, je voudrais signaler les résultats suivants:

*Objet semi-injectif au sens de Ravel dans certaines catégories*: la définition d'un objet semi-injectif au sens de Ravel, donnée plus haut dans la catégorie des modules, s'imagine sans peine dans une catégorie quelconque. Ravel dégage un type de catégories pour lesquelles les objets semi-injectifs sont les objets finaux. La catégorie des demi-groupes, grâce à un résultat de Sutov [12], celle des groupes sont du type précédent et par suite les objets semi-injectifs sont ceux réduits à un élément. Dans la catégorie des demi-groupes commutatifs, les injectifs sont les demi-groupes réduits à un élément, comme une démonstration directe permet de l'établir [(11), 1966 ch. 1 et 3].

*Objet quasi-injectif dans une catégorie de Grothendick*: J'ai remarqué [(13), 1966] que les théorèmes de base sur les modules quasi-injectifs s'étendent aux objets quasi-injectifs, dont la définition s'imagine sans peine, dans une catégorie de Grothendick, si l'on ajoute l'hypothèse que ces objets possèdent une enveloppe injective et que les sous-objets forment un ensemble (ces hypothèses sont vraies pour tout objet lorsque la catégorie possède un générateur). C'est ainsi que l'on peut établir que les objets quasi-injectifs sont ceux qui sont stables par les endomorphismes de leur enveloppe injective.

Si la catégorie de Grothendick possède un générateur, on peut aussi déduire mes résultats du théorème de Popescu-Gabriel [(14), 1964]: c'est ce que Tisseron a montré [(24), 1967].

Enfin, je voudrais signaler des résultats dans une troisième direction: G. Renault a étudié les modules  $M$  tels que tout sous-module admette une extension essentielle maximale unique dans  $M$  [(6), 1966]. J'ai étendu ses résultats aux modules  $M$  tels que tout sous-module admette une extension  $\Sigma$ -essentielle maximale unique dans  $M$  [(14), 1968].

Ravel a repris les travaux précédents en prenant pour cadre un treillis: il caractérise les treillis modulaires et  $\cap$ -continus dans lesquels tout élément

admet une extension essentielle maximale unique, la relation d'essentialité se définissant facilement dans un treillis. Il étend ainsi et précise les résultats de G. Renault et en revenant aux modules il donne une propriété inédite des modules quasi-injectifs [(11) ch. 2 et 3]. Dans un travail non encore publié, Ravel étudie par ailleurs, un treillis  $\cap$ -continu muni d'une relation dite  $\Delta$ -axiomatique: la relation d'essentialité, la relation de  $\Sigma$ -essentialité dans le treillis des sous-modules d'un module constituent des relations  $\Delta$ -axiomatiques. Ravel étudie les treillis dans lesquels tout élément admet une extension  $\Delta$ -axiomatique maximale unique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAER: Abelian groups... *Bull. Am. Math. Soc.*, 46, 1940, pp. 133-138.
- [2] TSAI CHE, T.: *Report on injective modules*. Ontario University, 1966.
- [3] FAITH et UTUMI: Baer moduls. *Arch. Math.*, 1964.
- [4] JOHNSON and WONG: Irreducible rings and quasi-injective moduls. *Journal of the London Math. Soc.*, vol. 36, 1961.
- [5] GOVOROF: Semi-injective moduls. *Algebra logika Sem.*, 2, 1963, n° 6, pp. 21-50.
- [6] RENAULT, G.: Etude des sous-modules compléments d'un module. *Fac. Sci. Paris*, thèse, 1966.
- [7] SERRE, J. P.: *Dimension homologique des modules et des anneaux*. Symposium de Tokyo, 1955.
- [8] MYASHITA: Quasi-projective moduls... *J. of Fac. Sci. Hokkaido Univ. Math.*, vol. 19, 1966, n° 2, pp. 86-110.
- [9] SEMADENI, Z.: Projectivity, injectivity, duality. *Rosprewy Math. Inst. Math. Polsk. Akad. Nauk*, n° 35, 1963, 47 pages.
- [10] HACQUE, M.: *Projectivité, injectivité, dualité d'après Z. Semadeni*. Séminaire Choquet, 17 décembre 1964.
- [11] RAVEL, J.: Injectivité. Généralisations. Relation d'essentialité dans un treillis de Johnson. Thèse de spécialité, *Fac. des Sciences de Lyon*, 1966.
- [12] SUTOV: Inclusion des demi-groupes dans des demi-groupes simples et complets. *Math. Sbornik*, 62, 104, n° 4, 1964, pp. 496-511.
- [13] MAURY, G.: *Objet quasi-injectif dans une catégorie de Grothendick*. Séminaire P. Dubreil, 25 janvier 1967.
- [14] MAURY, G.:  $\Sigma$ -compléments. *C. R. Ac. Sci. Paris*, 22 janvier 1968.
- [15] POPESCU- GABRIEL: Caractérisations des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 27 avril 1964.
- [16] DAZORD, J.: Anneaux filtrés de Gelfand. Thèse de spécialité. *Fac. Sc. Lyon*, 1966.
- [17] SANDERSON: A generalisation of injectivity and divisibility of moduls. *Can. Math. Bull.*, 1965, pp. 505-513.
- [18] MYASHITA: On quasi-injective moduls. *J. Fac. Sci. Hokkaido univ.*, 18, 1965, pp. 158-187.
- [19] HARADA: Note on quasi-injective moduls. *Osaka J. Math.*, 2, 1965, pp. 351-356.
- [20] CHAPTAL, N.: Sur les modules quasi-injectifs. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 264, 1967, pp. 173-175.

- [21] WONG: Atomic quasi-injective moduls. *J. Math. Kyoto Univ.*, 3, 3, 1964, pp. 295-308.
- [22] BALLE, J.: Structure des modules artiniens (cas commutatif). *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 266, 3 janvier 1968.
- [23] DAIGNEAULT, A.: Conditions pour l'existence d'enveloppe injective. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 8 janvier 1968.
- [24] TISSERON, C.: Objets quasi-injectifs dans une catégorie abélienne à générateurs et à limites inductives exactes. *Pub. Math. Fac. Sci. Lyon*, 1967, t. 4, fasc. 2, p. 145.

G. Maury

(Reçu le 15 avril 1968.)

Faculté des Sciences de Lyon  
49 rue Duguesclin  
69 - Lyon - 6.