L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE RENÉ GOSSE

Autor(en): **Janet, Maurice**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40723

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE RENÉ GOSSE

par Maurice JANET

La vie de René Gosse, si tragiquement rompue en 1943, a donné lieu à un beau livre *), d'une lecture très attachante; ouvrage qui laisse de côté, volontairement, son œuvre mathématique. Cette œuvre porte essentiellement sur la théorie analytique des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Elle est de celles qui ne doivent pas être oubliées.

Pendant longtemps, après la publication des mémoires de Monge et d'Ampère, il ne fut rien ajouté d'essentiel à la théorie qu'ils avaient développée. E. Goursat fut le premier d'abord à préciser ce qu'il convenait d'entendre par intégrale générale, puis par courbes caractéristiques, et ensuite à montrer la véritable portée d'une méthode « plus admirée qu'étudiée » proposée en 1870 par G. Darboux. En dehors de l'œuvre magistrale de E. Goursat, c'est à l'importante thèse de P. E. Gau (1911) que René Gosse se plaisait à reporter l'origine de ses propres travaux.

Rappelons seulement ici que la notion de courbes caractéristiques d'une équation du second ordre $F(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0$ se fonde sur la discussion du problème de Cauchy. Une caractéristique du second ordre est définie par un système de 5 équations de Pfaff entre 7 variables, une d'ordre n par un système de $2n + 1$ équations de Pfaff entre $2n + 3$ variables (et il peut s'introduire, exceptionnellement, des caractéristiques du premier ordre). Plaçons-nous dans l'hypothèse $F'_r F_t - F_s^2 \neq 0$; il y a alors deux familles de caractéristiques distinctes, les valeurs correspondantes de $\frac{dy}{dx}$ sont données par la relation:

$$F_r\,dy^2 - F_s\,dy\,dx + F_t\,dx^2 = 0$$

*) Lucienne GOSSE. *René Gosse 1883-1943. Chronique d'une vie française* (Plon 1962).

Cherchons, selon l'idée de Darboux, une équation d'ordre fini n, quelconque d'ailleurs, qui, jointe à l'équation proposée, forme un système dont la solution dépende d'une infinité de constantes arbitraires — en fait, essentiellement, d'une fonction arbitraire d'une variable: l'équation sera dite *en involution* avec la proposée. Si par exemple l'équation donnée s'écrit

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

il suffira de trouver une fonction φ de x, y, z et de celles des dérivées d'ordre n de z dont l'ordre par rapport à x est au plus 1, qui satisfasse, en tenant compte éventuellement de $\varphi = 0$, à un certain système simple (E) de deux équations aux dérivées partielles en φ: on peut convenir de dire alors que φ est une *involution* de l'équation $r + f = 0$. S'il se trouve que, sans avoir à tenir compte de $\varphi = 0$, le système soit vérifié, $\varphi - C$ sera une involution quelle que soit la constante C, et φ sera appelé un *invariant*: de fait, il résulte du système (E) que φ reste alors invariable lorsqu'on se déplace sur une des deux caractéristiques; autrement dit $d\varphi$ est « combinaison intégrable » d'un des deux systèmes différentiels caractéristiques. D'une manière analogue, si φ est une involution, elle « appartient » soit à l'une soit à l'autre famille de caractéristiques. Si φ est une involution de $r + f = 0$, la solution du problème de Cauchy pour le système $r + f = 0$, $\varphi = 0$ se ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Si φ et φ_1 sont deux involutions appartenant à une même famille de caractéristiques, le système $r + f = 0$, $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, s'il est compatible, a une solution dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. Si φ et φ_1 sont deux involutions appartenant à deux familles différentes de caractéristiques, le système $r + f = 0$ $\varphi = 0$ $\varphi_1 = 0$ a une solution dépendant d'un nombre fini de constantes arbitraires (1).

---

1) Considérons, pour fixer les idées, l'équation (A) $rs - p = 0$; sur chaque caractéristique d'une des familles, y reste invariable: sur une telle courbe $\varphi = \frac{s\gamma}{r} + \delta$ reste aussi invariable: $\frac{s\gamma}{r} + \delta - C$ est pour chaque valeur de la constante C une involution de (A); $\frac{s\gamma}{r} + \delta$ est un invariant de la famille envisagée. Les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondant aux caractéristiques sont, d'après la formule indiquée dans le texte, définies par $sdy^2 - rdy\,dx = 0$; on remarque que la valeur autre que zéro, à

Si maintenant on connaît deux invariants distincts u, v d'une même famille, $u - \psi(v)$ est, quelle que soit la fonction ψ, invariant de la même famille. Et si enfin on connaît deux invariants (u, v), (u_1, v_1) de chacune des deux familles, $u - \psi(v)$, $u_1 - \psi_1(v_1)$ seront invariants des deux familles et le système:

$$r + f = 0 \qquad u - \psi(v) = 0 \qquad u_1 - \psi_1(v_1) = 0$$

a une solution où figureront, outre éventuellement des constantes d'intégration en nombre fini, deux fonctions arbitraires ψ, ψ_1 d'une variable. On démontre dans ce cas que la solution générale de l'équation $r + f = 0$ peut s'exprimer par des formules donnant x, y, z en fonction de deux variables α, β, de p fonctions arbitraires de α et de leurs dérivées en nombre fini, de q fonctions arbitraires de β et de leurs dérivées en nombre fini, les p fonctions de α étant assujetties à $p - 1$ équations différentielles d'ordre quelconque, les q fonctions de β à $q - 1$ équations différentielles d'ordre quelconque.

La réciproque est vraie, et c'est ce qui fait l'intérêt remarquable de ce genre d'équations: c'est ce qu'on appelle les *équations de première classe.* Reconnaître si une équation est de première classe, former des types assez généraux d'équations de première classe, tels sont les problèmes qui se posent alors tout naturellement.

Pour une équation de la forme:

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

x, y sont respectivement des invariants évidents de chacune des deux familles de caractéristiques: il suffira de savoir s'il existe au moins un autre invariant pour chacune d'elles. E. Goursat *)

---

savoir $\frac{r}{s}$ n'est autre que le rapport $\frac{\varphi\,\delta}{\varphi\,\gamma}$: il y a là un fait général: on constatera un fait analogue pour les invariants de l'autre famille $\left(x - s, y - r, \frac{r}{s}\right)$.

En dehors des notations bien connues pour le 1er et le 2e ordre, nous avons adopté pour les dérivées troisièmes les notations:

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \qquad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} \qquad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} \qquad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

*) *Ann. Fac. Sc. Toulouse* (2e s. t. I. p. 31 et p. 439). La thèse de R. Gosse, soutenue en 1921, a été publiée dans le volume des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* qui porte la date de 1920 (3s t. 12. p. 106).

avait formé et intégré en 1899 toutes celles de ces équations qui ont un tel invariant d'ordre 2 au plus. R. Gosse est le premier qui se soit attaqué au problème général: il montre dans sa thèse qu'on est ramené aux formes trouvées par Goursat si l'on suppose qu'il existe un invariant d'ordre 2 pour une seule famille de caractéristiques. C'est aussi dans sa thèse qu'il établit les bases de la méthode à adopter: « Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un invariant, ou une involution, on peut déduire des conditions *seulement nécessaires*, mais qui ont l'avantage d'être simples. On profite de leur simplicité pour restreindre la généralité de la fonction $f(x, y, z, p, q)$, puis l'on essaie, par des transformations, de ramener l'équation à une forme canonique avantageuse. » E. Gau avait donné dans un cas très général des conditions nécessaires pour l'existence d'une involution d'ordre supérieur à 2. R. Gosse traite un cas laissé de côté par E. Gau: celui où une certaine équation $\Gamma_1(\lambda) = 0$ a une solution non nulle; il établit qu'on peut toujours adjoindre à cette équation une nouvelle condition nécessaire simple $\Gamma_2(\theta) = 0$. D'où il déduit, au total, une méthode générale de recherche de cas où l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$ admet une involution d'ordre quelconque n. Il généralise un théorème fondamental de Goursat à ce sujet, et, en supposant f linéaire par rapport à p, il montre que l'équation ne peut admettre d'involution d'ordre supérieur à 2 pour $dx = 0$ que si elle admet une *intégrale intermédiaire du premier ordre* pour $dy = 0$. C'est un des objets du *troisième* mémoire de Gosse paru aux *Annales de la Faculté de Toulouse:* il commence par y rechercher les équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q, r)$ qui admettent un invariant du 2e ordre pour les caractéristiques où y est invariant et deux invariants du 2e ordre pour les autres.

Passant ensuite au cas de l'équation $s = p\theta(x, y, z, q) + \omega(x, y, z, q)$, il étudie complètement les deux cas typiques essentiels:

$$s = f(x, y, q) \qquad s = p\theta(y, z, q)$$

où *l'intégrale intermédiaire* du premier ordre apparaît d'elle-même. Tous ces résultats se trouvent rassemblés et condensés dans le fascicule 12 du *Mémorial des Sciences Mathématiques*, paru en 1926.

Les travaux de Gosse de cette époque se sont trouvés en liaison avec ceux de Lainé, qui a poussé jusqu'au bout certaines discussions commencées par Gosse, et qui a mis en évidence en particulier une équation assez remarquable qui, dit Gosse, doit occuper une place à part dans la classification: les deux auteurs la ramènent à des types connus, étudiés par Goursat, assez différents l'un de l'autre: ils utilisent l'un et l'autre une transformation de Bäcklund, qui se présente d'ailleurs à des titres différents, comme l'observe Goursat en présentant les deux notes... Lainé avait été amené dans ses travaux à énoncer de nouvelles conditions nécessaires. Cela donna occasion à Gosse de publier, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de 1929, un mémoire assez étendu, où il démontre entre autres que des quatre conditions nécessaires établies par Lainé, les deux premières seules sont vraiment utiles; la troisième ou bien exprime qu'il y a un invariant du 3e ordre, ou bien est une identité; la quatrième est conséquence des deux premières...

Dans la suite chronologique des travaux de Gosse, nous venons de laisser de côté le *deuxième* mémoire qu'il a fait paraître aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. Il s'agit en effet là d'équations d'un autre type: les équations de la forme $r + f(x, y, z, p, q, t) = 0$ qui admettent *deux* invariants de 2e ordre pour une des familles de caractéristiques. Il les ramène à un petit nombre de types canoniques simples et est ainsi conduit à de nouveaux types d'équations de première classe.

C'est de résultats beaucoup plus généraux que s'occupe le mémoire paru en 1925 au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. Il est consacré à la démonstration du théorème suivant:

Si une équation $r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$ *admet, pour la famille de caractéristiques correspondant à* $\frac{dy}{dx} = m_2$, *un invariant d' ordre supérieur à 3 sans en admettre d'ordre inférieur, ou bien elle admet une involution d'ordre 3, ou bien* $\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_2 \frac{\partial m_2}{\partial s} = 0$ (sauf peut-être dans un cas particulier précisé). L'auteur signale que quelques-uns des résultats de ce mémoire ont été publiés

sans démonstration par E. Gau dans une note postérieure à la sienne, mais qui provenait d'un pli cacheté déposé antérieurement, et il se plaît ainsi à reconnaître l'antériorité, pour une part importante, de son émule et ami.

L'un des problèmes les plus célèbres de la géométrie différentielle, celui de la déformation des surfaces, avait été ramené par Darboux à une équation de Monge-Ampère, et par Gau à une équation linéaire. C'est à Gosse qu'il était réservé de traiter le problème dans sa généralité (*Acta Mathematica* t. 51). L'équation en question est entièrement intégrable dans les cas seulement où l'élément linéaire donné convient:

aux développées des surfaces minima

au paraboloïde de révolution

aux paraboloïdes de Weingarten

et, plus généralement, peut se mettre sous la forme $du^2 + 2[u + n(n-1)v^2]\,dv^2$ où n est un entier positif.

Ces cas exceptés, la solution explicite la plus générale ne contient une fonction arbitraire que dans trois autres cas bien précisés, (où d'ailleurs l'équation de la déformation admet soit une seule involution du 1er ordre, soit une seule involution du 2e ordre, soit encore deux involutions du 2e ordre); ces trois cas conduisent toujours à des surfaces réglées.

Le problème fondamental de la déformation des surfaces se trouve ainsi résolu. Malgré les élégantes études géométriques dont il avait été l'objet précédemment, ce sont les méthodes de E. Gau et de R. Gosse qui pour la première fois prennent la question par le fond; les résultats précédemment trouvés apparaissent sous leur vrai jour et se classent tout naturellement.

Il en est de même pour un autre problème de Géométrie auquel s'attache ensuite Gosse: la recherche des surfaces dites de Weingarten: celles dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre.

On trouvera enfin dans diverses notes, présentées aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, des indications succinctes sur les résultats obtenus par Gosse sur d'autres questions relatives aux équations du second ordre et qui devaient

dans sa pensée donner lieu ensuite à des mémoires plus développés *).

Dans une tout autre direction, il faut noter un mémoire paru en 1934 au *Mémorial de l'Artillerie* et qui se rattache sans doute à des préoccupations de l'époque 1914-1918... Dans l'étude du mouvement d'un point matériel par rapport à la Terre, il y a lieu de tenir compte du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même, et d'autre part de la résistance de l'air, qui dépend de la densité, et qu'on suppose directement opposée à la vitesse, et fonction de la valeur de celle-ci. Ce qu'on appelle « mouvement balistique » est la solution d'un certain système simple Σ classique. Gosse établit un système S, plus compliqué, simplification d'ailleurs des équations rigoureuses du problème. On prend pour Σ et S les mêmes conditions initiales. Ce qui est fourni par l'expérience, c'est la solution de S; ce qui doit être mis dans les tables de tir, c'est la solution de Σ. Après avoir fait des approximations cohérentes, on est conduit à distinguer deux cas principaux, celui où on néglige la perturbation due à la résistance de l'air, et celui où on en tient compte. Dans ces deux cas, R. Gosse ramène la solution à des quadratures, et indique le parti qu'on peut tirer des formules obtenues dans les différentes circonstances qui se présentent dans la pratique.

Une grande œuvre encyclopédique avait été entreprise en 1933 par A. de Monzie. Une des cinq sections de la partie « La Mathématique » est consacrée aux Equations différentielles.

C'est à R. Gosse que fut, très naturellement, demandée la rédaction d'un chapitre sur la « Méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles ».

Quand parut, en 1937, le tome I de l'*Encyclopédie française*, le nom de R. Gosse y voisinait avec ceux de J. Hadamard et de E. Vessiot.

*) La théorie des équations aux dérivées partielles du 2e ordre à deux variables indépendantes a donné lieu en 1939 et en 1942 à deux beaux mémoires de E. Vessiot (parus au *Journal des mathématiques pures et appliquées*). On doit aussi signaler à ce sujet certaines recherches de J. Drach (1939) qu'a exposées M. G. Heilbronn en 1955 dans le fascicule 129 du *Mémorial des Sciences Mathématiques*.

Travaux mathématiques de René GOSSE

(liste chronologique)

Notes aux *C.R. de l'Académie des Sciences* tome	page	Année	Recueils divers
		1920	*Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse* (3e s. 12.106).
173	903	1921	
174	1 612	1922	(3e s. 14. 137)
178	542	1924	(3e 1.16.173)
	912		
	1 680		
	2 053		
181	1 125	1925	*J. de Math. p. et appl.* (9e s.4.381)
182	1 119	1926	*Mémorial des Sc. Math.* (12)
	1 264		
	1 597		
184	266	1927	
	363		
186	489	1928	*Acta Mathematica* (51.319)
	1 269		
188	853	1929	*J. de Math. p. et appl.* (9e s. 8.301)
192	1 185	1931	
	1 348		
	1 522		
194	348	1932	
		1934	*Mém. de l'Artillerie* (t. X III p. 405)
		1937	*Encyclopédie française* (1.80.9 à 16) chap. 5 de la section C de « La Mathématique »

Des notices sur R. Gosse ont été écrites par:

R. FORTRAT (*Ann. Univ. Grenoble*, t. 21, 1945).
J. FAVARD (1963).

(Reçu le 1er mars 1965)

Prol. M. Janet
4, rue de la Cure
Paris 16e