

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 12 (1966)  
**Heft:** 3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES AVEC ARGUMENTS RETARDÉS  
**Autor:** Nohel, John A.  
**Anhang:** Supplément  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-40738>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Evidemment, si de plus  $f(0) = 0$ ,  $V(0) = 0$ ,  $V_0^*(\phi) < 0$  ( $\phi \neq 0$ ), toutes les solutions de (9) tendent vers zéro (stabilité asymptotique).

Pour appliquer ces résultats à (1), on peut définir la fonction (voir [1])

$$V(\phi) = G(\phi(0)) - \frac{1}{2} \int_{-r}^0 \dot{a}(-\theta) \left[ \int_{\theta}^0 g(\phi(s)) ds \right]^2 d\theta$$

pour laquelle

$$V_1^*(\phi) = \frac{1}{2} \dot{a}(r) \left[ \int_{-r}^0 g(\phi(\theta)) d\theta \right]^2 - \frac{1}{2} \int_{-r}^0 \ddot{a}(-\theta) \left[ \int_{\theta}^0 g(\phi(s)) ds \right]^2 d\theta,$$

pour  $\phi \in C_H$  et on peut déduire le théorème 1 directement du théorème 4. Si

$$a(t) = \frac{1}{r}(r-t)$$

on obtient le théorème 2 A de la même manière; mais de la théorie générale (théorème 3) on peut seulement déduire que  $\Omega(x(\phi))$  est un tore de solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$y'' + g(y) = 0$$

qui satisfait

$$\int_{-r}^0 g(y(t+\theta)) d\theta = 0, \quad -\infty < t < \infty.$$

Pour obtenir le théorème 2 B, C il faut employer les arguments particuliers de [1]. Pour l'idée de cette démonstration voir le supplément.

#### SUPPLÉMENT

Avec  $a(t) = \frac{1}{r}(r-t)$  il s'ensuit de (5), (6) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r}^t g(x(s)) ds = 0.$$

Puisque chaque solution de (1) satisfait l'équation

$$x''(t) + g(x(t)) = \frac{1}{r} \int_{t-r}^t g(x(s)) ds \quad (0 \leq t < \infty),$$

on infère que la solution  $x(t)$  tend, dans un sens convenable, vers une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$(10) \quad u''(t) + g(u(t)) = 0,$$

quand  $t \rightarrow \infty$ . Rappelons que toutes les solutions de (10) sont périodiques (voir (3)) et satisfont

$$(11) \quad G(u(t)) + \frac{1}{2} (u'(t))^2 \equiv k \quad (-\infty < t < \infty),$$

où  $k$  est une constante; donc les solutions forment les cycles fermés dans le plan  $u, u'$ . La démonstration précise ces observations.

D'abord, on a de (4) et (5) au-dessus que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = v$  existe. Supposons que nous ne nous trouvons pas dans le cas trivial  $v = 0$  — donc  $\Gamma^+(x(t)) \neq (0, 0)$ , l'origine du plan. A cause de la continuité des solutions de l'équation (10) par rapport aux valeurs initiales et de la définition d'un ensemble limite on peut donner la description suivante de l'ensemble  $\Gamma^+(x(t))$ :

(i) Si  $(\alpha, \beta) \in \Gamma^+(x(t))$ , le cycle fermé  $\gamma(\alpha, \beta)$  de l'équation (10) dans le plan  $u, u'$  à travers  $(\alpha, \beta)$  appartient à  $\Gamma^+(x(t))$ .

(ii) Soit  $(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$  deux points dans  $\Gamma^+(x(t))$  et définissons le tore  $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$  l'ensemble fermé et connexe de tous les points dans le plan  $u, u'$  entre et sur les deux cycles fermés  $\gamma(\alpha_1, \beta_1)$  et  $\gamma(\alpha_2, \beta_2)$ . On a  $D(0, 0; 0, 0) = (0, 0)$  et  $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2) = \gamma(\alpha_1, \beta_1)$  si et seulement si  $(\alpha_2, \beta_2) \in \gamma(\alpha_1, \beta_1)$ . En utilisant encore la continuité, on montre qu'il existe deux points  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ , tels que  $\Gamma^+(x(t)) = D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ .

Le but est de montrer que le tore  $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$  s'écroule dans un seul cycle; c'est-à-dire qu'il existe un point  $(p, q) \in \Gamma^+(x(t))$  tel que  $\Gamma^+(x(t)) = \gamma(p, q)$ . Pour accomplir ceci on montre d'abord, en utilisant la continuité et la périodicité des solutions  $u(t, t_0, \alpha, \beta)$  de (10) où  $u(t_0, t_0, \alpha, \beta) = \alpha, u'(t_0, t_0, \alpha, \beta) = \beta$ , que

$$\int_{t-r}^t g(u(\tau, t_0; \alpha, \beta)) d\tau = 0$$

pour chaque  $(\alpha, \beta) \in \Gamma^+(x(t))$ . Il s'ensuit que

$$u(t+r, t_0, \alpha, \beta) = u(t, t_0, \alpha, \beta) \quad (-\infty < t, t_0 < \infty),$$

et par conséquent il existe un nombre entier  $m \geq 1$ , indépendant de  $(\alpha, \beta)$ , tel que  $r = m\rho(\alpha, \beta)$ , où  $\rho$  est définie dans le théorème 2. Par les mêmes méthodes on montre — voir (4)

$$(12) \quad G(u(t, t_0, \alpha, \beta)) + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^t \left[ \int_{\tau}^t g(u(s, t_0, \alpha, \beta)) ds \right]^2 d\tau = v = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t),$$

pour  $-\infty < t, t_0 < \infty$ . Puisque  $v > 0$ , on trouve que  $(0, 0) \notin \Gamma^+(x(t))$  et donc  $\Gamma^+(x(t))$  est un anneau dans le plan  $u, u'$  sans l'origine. On peut tirer la conclusion B, théorème 2, directement de (12) et de cette remarque, voir [1], et évidemment on a aussi C.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] LEVIN, J. J., A. J. NOHEL, On a nonlinear delay equation. *J. Math. Anal. Appl.*, .., 1964, 31-44.
- [2] HALE, J. K., Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations. *J. Diff. Equ.*, 1, 1965, 452-82.
- [3] MILLER, R. K., Asymptotic behaviour of nonlinear delay-differential equations. *J. Diff. Equ.*, 1, 1965, 293-305.
- [4] VOGEL, Th., *Sur quelques types de systèmes évolutifs non dynamiques*. Inst. Etud. Sup. OTAN, Padoue, sept. 1965, 55 p.

( Reçu le 1<sup>er</sup> août 1966 )

University of Wisconsin  
Madison, Wis.