

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	12 (1966)
Heft:	3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES AVEC ARGUMENTS RETARDÉS
Autor:	Nohel, John A.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-40738

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES AVEC ARGUMENTS RETARDÉS

par John A. NOHEL *)

Les buts de cet exposé sont:

- 1^o De donner quelques résultats [1] concernant le comportement qualitatif des solutions de l'équation:

$$(1) \quad x'(t) = - \int_{t-r}^t a(t-\tau) g(x(\tau)) d\tau,$$

où $a(t)$, $g(x)$ sont des fonctions données et $r > 0$ est une constante.

- 2^o De présenter quelques généralisations de ces idées, obtenues récemment par Hale [2] et R. Miller [3], et d'arriver à une théorie qualitative pour les systèmes plus généraux que (1); mais, comme nous verrons, on ne peut pas obtenir tous les résultats qualitatifs pour (1) de cette théorie.

I. Soit $a(t)$ continue sur $0 \leq t \leq r$ et $g(x)$ continue sur $-\infty < x < \infty$. Etant donnée une fonction ϕ , continue sur $-r \leq t \leq 0$, on montre (voir par exemple Vogel [4]) qu'il existe une constante $A > 0$ et une solution $x(t) = x(\phi)(t)$ de (1) définie sur $-r \leq t \leq A$ satisfaisant la condition $x(t) = \phi(t)$ sur $-r \leq t \leq 0$ et l'équation (1) sur $0 < t < A$. On peut prolonger la solution $x(t)$ à droite, aussi longtemps que $|x(\phi)(t)|$ reste bornée. Si de plus $g(x)$ satisfait une condition de Lipschitz, la solution est unique et elle dépend continûment de ϕ .

Souvent il est convenable d'écrire (1) sous la forme équivalente:

$$(1) \quad x'(t) = - \int_{-r}^0 a(-s) g(x(t+s)) ds.$$

*) The preparation of this lecture was supported by the Air Force Office of Scientific Research Grant AF - AFOSR - 925 - 65.

Pour le comportement qualitatif nous supposons:

$$(2) \quad a(t) \in C(0 \leq t \leq r),$$

$$(-1)^k a^{(k)}(t) \geq 0 \quad (0 < t < r, \quad k = 0, 1, 2, 3), \quad a(r) = 0$$

$$(3) \quad g(x) \in C(-\infty, \infty), \quad xg(x) > 0 \quad (x \neq 0),$$

$$G(x) = \int_0^x g(\tau) d\tau \rightarrow \infty \quad (|x| \rightarrow \infty),$$

et nous remarquons que si la dernière hypothèse de (3) n'est pas satisfaita, tous les résultats sont valables pour $\sup_{-r \leq t \leq 0} |\Phi(t)|$ assez petit.

Soit $x(t)$ une solution de (1) sur $-r \leq t < A$, $A > 0$, et définissons

$$(4) \quad V(t) = G(x(t)) - \frac{1}{2} \int_{t-r}^t a'(t-\tau) \left[\int_{\tau}^t g(x(s)) ds \right]^2 d\tau,$$

ou, écrit sous une forme équivalente,

$$(4^*) \quad V(t) = G(x(t)) - \frac{1}{2} \int_{-r}^0 a'(-s) \left[\int_s^0 g(x(t+\lambda)) d\lambda \right]^2 ds.$$

On trouve que pour $-r \leq t < A$

$$(5) \quad V'(t) = \frac{1}{2} a'(r) \left[\int_{t-r}^t g(x(s)) ds \right]^2$$

$$- \frac{1}{2} \int_{t-r}^t \ddot{a}(t-\tau) \left[\int_{\tau}^t g(x(s)) ds \right]^2 d\tau,$$

ou

$$(5^*) \quad V'(t) = \frac{1}{2} a'(r) \left[\int_{-r}^0 g(x(t+s)) ds \right]^2$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-r}^0 a''(-s) \left[\int_s^0 g(x(t+\lambda)) d\lambda \right]^2 ds.$$

Puisque les hypothèses (2) et (3) sont satisfaites, on a $V(t) \geq 0$ et $V'(t) \leq 0$, $-r < t < A$. Il s'ensuit

$$0 \leq V(t) \leq V(0) = G(x(0)) - \frac{1}{2} \int_{-r}^0 a'(-s) \left[\int_s^0 g(\Phi(\lambda)) d\lambda \right]^2 ds;$$

c'est-à-dire $V(t)$ est bornée par une constante indépendante de A . Dès lors, utilisant (3), on peut prolonger la solution $x(t)$ jusqu'à $0 \leq t < \infty$ et $x(t)$ et aussi $x'(t)$, $x''(t)$, restent bornées. Si on forme $V''(t)$ on trouve que $V''(t)$ est bornée; joint à $V(t) \geq 0$, $V'(t) \leq 0$, ce résultat implique

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V'(t) = 0.$$

On peut maintenant déduire le résultat suivant.

Théorème I.

Les hypothèses (2) et (3) soient satisfaites. Etant donnée une fonction ϕ continue sur $-r \leq t \leq 0$, il existe une solution $x(t) = x(\phi)(t)$ de (1) définie sur $-r < t < \infty$, avec $x(t) = \phi(t)$ quand $-r \leq t \leq 0$, tel que $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ sont bornées. Si de plus $a''(t) \neq 0$ la solution satisfait

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x^{(k)}(t) = 0 \quad (k = 0, 1, 2).$$

Pour obtenir (7), on se sert de (5) et (6) desquelles on tire:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r}^t a''(t-\tau) \left[\int_{\tau}^t g(x(s)) ds \right]^2 d\tau = 0,$$

et on montre (7) sans difficulté.

La démonstration que nous avons indiquée ci-dessus n'est pas valable si $a''(t) \equiv 0$; en particulier choisissons

$$a(t) = \frac{1}{r}(r-t) :$$

On peut conclure que toutes les solutions existent et restent bornées, mais on ne peut pas déduire (7). En effet, (7) ne reste pas nécessairement vraie, en général le comportement est plus compliqué.

Théorème 2.

A. *Soit*

$$a(t) = \frac{1}{r}(r-t)$$

et supposons que (3) est satisfaite et que $g(x)$ est Lipschitzienne localement. Etant donnée une fonction ϕ continue sur $-r \leq t \leq 0$, il existe une solu-

tion $x(t) = x(\phi)(t)$ définie sur $-r \leq t < \infty$ avec $x(t) = \phi(t)$ pour $-r \leq t \leq 0$ et qui satisfait

$$|x^{(j)}(t)| \leq K \quad (0 \leq t < \infty; j = 0, 1, 2),$$

où K est une constante qui dépend seulement de ϕ .

B. L'ensemble limite $\Gamma^+(x(t))$ de la courbe $\{x(t), x'(t)\}$ dans le plan est un seul cycle γ fermé du système

$$(8) \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = g(u) \end{cases} \quad (\text{ou } u'' + g(u) = 0).$$

C. Si $\Gamma^+(x(t)) = \gamma \neq (0, 0)$, soit $(\alpha, \beta) \in \gamma$ et soit $\rho(\alpha, \beta)$ la plus petite période de toutes les solutions de (8) qui engendre γ . Il existe un nombre entier $m = m(\alpha, \beta) \geq 1$ tel que $r = m\rho(\alpha, \beta)$.

Nous avons déjà montré A.; il s'ensuit que $\Gamma^+(x(t))$ est non-vide. Nous donnerons l'idée de la démonstration de B. et C. dans le supplément au-dessous.

II. Pour présenter les généralisations nous avons besoin d'un certain nombre de définitions. Soit R^n l'espace euclidien réel, $|x|$ la norme dans R^n . Soit C l'espace des fonctions ϕ continues définies sur $[-r, 0]$ à valeurs dans R^n et soit $\|\phi\| = \max_{-r \leq u \leq 0} |\phi(u)|$ la norme dans C .

Si x est une fonction: $[-r, \infty) \rightarrow R^n$, soit $t \geq 0$ et considérons la fonction $x_t \in C$ définie sur $-r \leq u \leq 0$ par l'équation:

$$x_t(u) = x(t+u) \quad (-r \leq u \leq 0);$$

x_t représente la portion du graphique de la fonction $x(t)$ sur l'intervalle $[t-r, t]$ « transférée » à l'intervalle $[-r, 0]$.

Désignons par C_H la boule ouverte dans C de rayon H , $H > 0$ ($C_H = \{\phi \in C; \|\phi\| < H\}$). Soit f une fonction définie sur C_H pour un nombre $H > 0$ avec ses valeurs dans R^n ($f: C_H \rightarrow R^n$), et considérons le système des équations fonctionnelles

$$(9) \quad \dot{x}(t) = f(x_t)$$

où

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Il est clair que (1) est un cas particulier de (9); chaque système des équations différentielles aux différences est un autre cas *).

Définition 1.

Soit $\phi \in C_H$ une fonction donnée pour un $H > 0$. S'il existe un nombre $A > 0$ et une fonction $x(\phi) = x(\phi)(t)$, $(x(\phi)): [-r, A) \rightarrow R^n$ définie sur $(-r, A)$ telle que $x_t(\phi) \in C_H$ pour $0 \leq t < A$, $x_0(\phi)(t) = \phi(t)$ ($-r \leq t \leq 0$) et $\dot{x}(\phi)(t) = f(x_t(\phi))$ ($0 < t < A$), on dit que $x(\phi)$ est une solution de (9) avec la valeur initiale ϕ .

Si f est continue dans C_H pour $H > 0$, il existe une solution $x(\phi)$ (locale) avec la valeur initiale ϕ (voir [4]). Si f est de plus Lipschitzienne localement dans C_H , la solution est unique et dépend continûment de ϕ .

Nous supposerons toujours que f est continue et Lipschitzienne localement dans C_H . Une hypothèse plus faible qu'on peut souvent utiliser est la suivante: Si $H_1 < H$, pour chaque ϕ , $\|\phi\| \leq H$, il existe un nombre L tel que $|f(\phi)| \leq L$.

Remarquons aussi qu'on peut prolonger chaque solution $x(\phi)$ de (1) avec $\phi \in C_H$ jusqu'à la frontière de C_H . Si $f(0) = 0$ on peut donner les définitions suivantes.

Définition 2.

La solution 0 de (9) est stable si pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $x_t(\phi)$ existe pour chaque $t \geq 0$, $x_t(\phi) \in C_H$ et $\|x_t(\phi)\| < \varepsilon$ pour $t > 0$, pourvu que $\|\phi\| < \delta$.

Définition 3.

La solution 0 de (9) est stable asymptotiquement si elle est stable et s'il existe un nombre $0 < H_1 < H$ tel que $x_t \in C_H$ pour $t \geq 0$ et $x_t(\phi) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, pourvu que $\|\phi\| \leq H_1$. (Si H_1 est arbitraire, la stabilité asymptotique s'appelle globale.)

Chaque solution de (9) définit un « mouvement » dans l'espace C .

*) Dans (3) M. Miller considère le cas plus général que (9) avec f fonction définie sur $R^+ \times C_H$, f périodique par rapport à t , et aussi une perturbation de cette équation.

Définition 4.

Soit $x(\phi)$ une solution de (9) avec la valeur initiale ϕ , définie sur $-r \leq t < A$, $A > 0$. Le mouvement de $x(\phi)$ dans C est l'ensemble de toutes les fonctions $x_t(\phi) \in C$, $0 \leq t < A$ $\left(\bigcup_{0 \leq t < A} x_t(\phi) \right)$.

Définition 5.

Soit $x(\phi)$ une solution de (9) avec la valeur initiale ϕ , définie sur $0 \leq t < \infty$. Une fonction $\Psi \in C$ appartient à l'ensemble limite de $x(\phi)$ ($\Psi \in \Omega(x(\phi))$) si et seulement s'il existe une suite $\{t_n\} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{t_n}(\phi) - \Psi\| = 0$.

Définition 6.

Soit $M \subset C$; M est un ensemble invariant par rapport à (9) si et seulement si pour chaque $\phi \in M$ il existe une fonction $x(\phi)(t)$ définie sur $-\infty < t < \infty$, telle que $x_t(\phi) \in M$ pour chaque t , $-\infty < t < \infty$, $x_0(\phi) = \phi$, $x(\phi)$ est une solution de (9) sur $-\infty < t < \infty$.

On peut vérifier le résultat suivant comme dans la théorie des équations différentielles ordinaires:

Lemme.

Soit $x(\phi)$ une solution de (9) définie sur $-r \leq t < \infty$ avec $x_0(\phi) = \phi \in C_H$ et telle que $\|x_t(\phi)\| \leq H_1 < H$, $0 \leq t < \infty$. L'ensemble limite $\Omega(x(\phi))$ de la solution $x(\phi)$ est non-vide, compact, invariant par rapport à (9) et $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x_t(\phi), \Omega(x(\phi))) = 0$.

* * *

On peut maintenant présenter presque toutes les analogies des théorèmes dans la théorie de la stabilité des solutions des équations différentielles ordinaires [2], [3]. Nous donnerons quelques exemples. Soit V une fonction scalaire réelle définie sur C_H et soit $x(\phi)$ une solution de (9), $x_0(\phi) = \phi$, $x_t(\phi) \in C_H$, $0 \leq t < \infty$.

Définition 7.

La dérivée de V par rapport à (9), $V_9^*(\phi)$ est définie par l'équation

$$\dot{V}_9^*(\phi) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{V(x_h(\phi)) - V(\phi)}{h}.$$

Théorème 3.

Soit V une fonction scalaire continue et Lipschitzienne localement sur C_H . Soit $U_L \subset C_H$ tel que $V(\phi) < L$ pour chaque $\phi \in U_L$ et pour chaque $\phi \in U_L$ il existe une constante k telle que $|\phi(0)| \leq k$, $V(\phi) \geq 0$, $\dot{V}(\phi) \leq 0$. Considérons l'ensemble $S = \{\phi; \phi \in U_L, V_9^*(\phi) = 0\}$. Soit M le plus grand sous-ensemble invariant dans S ; il s'ensuit que chaque solution $x(\Psi)$ de (9) avec $\Psi \in U_L$ s'approche de M quand $t \rightarrow \infty$.

Pour les applications si $f(0) = 0$ et $M = 0$ on a ici un résultat concernant la stabilité asymptotique de la solution $x \equiv 0$ de (9). D'ailleurs l'ensemble U_L nous donne une estimation du domaine d'attraction de l'origine.

Corollaire.

Si aussi $\dot{V}_9^*(\phi) < 0$ pour $\phi \in U_L$, $\phi \neq 0$, chaque solution de (9) qui commence dans U_L tend vers zéro quand $t \rightarrow \infty$.

Démonstration du théorème 3.

Soit $\Psi \in U_L$ une fonction donnée et considérons la solution $x(\Psi)$. On a $V(x_t(\Psi)) \geq 0$, $V_9^*(x_t(\Psi)) \leq 0$, $0 \leq t < \infty$, et considérée comme une fonction de t , $V(x_t(\Psi))$ est non-croissante. Il s'ensuit que $x_t(\Psi) \in U_L$, $0 \leq t < \infty$. Puisque $|x(0)| \leq k$, on a $|x_t(\Psi)| \leq k$, $0 \leq t < \infty$, le lemme donne que l'ensemble limite $\Omega(x(\Psi))$ est invariant. La limite: $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x_t(\Psi)) = l_0$ existe ($l_0 < L$) et $V(x_t(\Psi)) = l_0$ sur $\Omega(x(\Psi))$.

Dès lors on a aussi que $\Omega(x(\Psi)) \subset U_L$ et $V_9^*(x_t(\Psi)) = 0$ sur $\Omega(x(\Psi))$. Alors $\Omega(x(\Psi)) \subset M$ et si on applique encore le lemme, on obtient $x_t(\Psi) \rightarrow M$ quand $t \rightarrow \infty$; ce que nous avons voulu démontrer.

Un autre résultat, avec presque la même démonstration, est celui-ci:

Théorème 4.

A. Soit $C_H = C$ et V une fonction scalaire, continue sur C . Soit $V(\phi) \geq 0$, $V_9^*(\phi) \leq 0$ pour chaque $\phi \in C$. Soit $S = \{\phi \in C; V_9^*(\phi) = 0\}$ et M le plus grand sous-ensemble invariant dans S . Toutes les solutions de (9) qui sont bornées sur $0 \leq t < \infty$ tendent vers M quand $t \rightarrow \infty$.

B. S'il existe une fonction $u(s) \geq 0$, continue sur $0 \leq s < \infty$, $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, et $|u(0)| \leq V(\phi)$ pour toutes $\phi \in C$, toutes les solutions de (9) avec les valeurs initiales dans C sont bornées.

Evidemment, si de plus $f(0) = 0$, $V(0) = 0$, $V_0^*(\phi) < 0$ ($\phi \neq 0$), toutes les solutions de (9) tendent vers zéro (stabilité asymptotique).

Pour appliquer ces résultats à (1), on peut définir la fonction (voir [1])

$$V(\phi) = G(\phi(0)) - \frac{1}{2} \int_{-r}^0 \dot{a}(-\theta) \left[\int_0^{\theta} g(\phi(s)) ds \right]^2 d\theta$$

pour laquelle

$$V_1^*(\phi) = \frac{1}{2} \dot{a}(r) \left[\int_{-r}^0 g(\phi(\theta)) d\theta \right]^2 - \frac{1}{2} \int_{-r}^0 \ddot{a}(-\theta) \left[\int_0^{\theta} g(\phi(s)) ds \right]^2 d\theta,$$

pour $\phi \in C_H$ et on peut déduire le théorème 1 directement du théorème 4. Si

$$a(t) = \frac{1}{r}(r-t)$$

on obtient le théorème 2 A de la même manière; mais de la théorie générale (théorème 3) on peut seulement déduire que $\Omega(x(\phi))$ est un tore de solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$y'' + g(y) = 0$$

qui satisfont

$$\int_{-r}^0 g(y(t+\theta)) d\theta = 0, \quad -\infty < t < \infty.$$

Pour obtenir le théorème 2 B, C il faut employer les arguments particuliers de [1]. Pour l'idée de cette démonstration voir le supplément.

SUPPLÉMENT

Avec $a(t) = \frac{1}{r}(r-t)$ il s'ensuit de (5), (6) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r}^t g(x(s)) ds = 0.$$

Puisque chaque solution de (1) satisfait l'équation

$$x''(t) + g(x(t)) = \frac{1}{r} \int_{t-r}^t g(x(s)) ds \quad (0 \leq t < \infty),$$

on infère que la solution $x(t)$ tend, dans un sens convenable, vers une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$(10) \quad u''(t) + g(u(t)) = 0,$$

quand $t \rightarrow \infty$. Rappelons que toutes les solutions de (10) sont périodiques (voir (3)) et satisfont

$$(11) \quad G(u(t)) + \frac{1}{2}(u'(t))^2 \equiv k \quad (-\infty < t < \infty),$$

où k est une constante; donc les solutions forment les cycles fermés dans le plan u, u' . La démonstration précise ces observations.

D'abord, on a de (4) et (5) au-dessus que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = v$ existe. Supposons que nous ne nous trouvons pas dans le cas trivial $v = 0$ — donc $\Gamma^+(x(t)) \neq (0, 0)$, l'origine du plan. A cause de la continuité des solutions de l'équation (10) par rapport aux valeurs initiales et de la définition d'un ensemble limite on peut donner la description suivante de l'ensemble $\Gamma^+(x(t))$:

- (i) Si $(\alpha, \beta) \in \Gamma^+(x(t))$, le cycle fermé $\gamma(\alpha, \beta)$ de l'équation (10) dans le plan u, u' à travers (α, β) appartient à $\Gamma^+(x(t))$.
- (ii) Soit (α_1, β_1) et (α_2, β_2) deux points dans $\Gamma^+(x(t))$ et définissons le tore $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ l'ensemble fermé et connexe de tous les points dans le plan u, u' entre et sur les deux cycles fermés $\gamma(\alpha_1, \beta_1)$ et $\gamma(\alpha_2, \beta_2)$. On a $D(0, 0; 0, 0) = (0, 0)$ et $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2) = \gamma(\alpha_1, \beta_1)$ si et seulement si $(\alpha_2, \beta_2) \in \gamma(\alpha_1, \beta_1)$. En utilisant encore la continuité, on montre qu'il existe deux points $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$, tels que $\Gamma^+(x(t)) = D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$.

Le but est de montrer que le tore $D(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ s'écroule dans un seul cycle; c'est-à-dire qu'il existe un point $(p, q) \in \Gamma^+(x(t))$ tel que $\Gamma^+(x(t)) = \gamma(p, q)$. Pour accomplir ceci on montre d'abord, en utilisant la continuité et la périodicité des solutions $u(t, t_0, \alpha, \beta)$ de (10) où $u(t_0, t_0, \alpha, \beta) = \alpha$, $u'(t_0, t_0, \alpha, \beta) = \beta$, que

$$\int_{t-r}^t g(u(\tau, t_0; \alpha, \beta)) d\tau = 0$$

pour chaque $(\alpha, \beta) \in \Gamma^+(x(t))$. Il s'ensuit que

$$u(t+r, t_0, \alpha, \beta) = u(t, t_0, \alpha, \beta) \quad (-\infty < t, t_0 < \infty),$$

et par conséquent il existe un nombre entier $m \geq 1$, indépendant de (α, β) , tel que $r = m\rho(\alpha, \beta)$, où ρ est définie dans le théorème 2. Par les mêmes méthodes on montre — voir (4)

$$(12) \quad G(u(t, t_0, \alpha, \beta) + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^t \left[\int_{\tau}^t g(u(s, t_0, \alpha, \beta) ds \right]^2 d\tau) = v = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t),$$

pour $-\infty < t, t_0 < \infty$. Puisque $v > 0$, on trouve que $(0, 0) \notin \Gamma^+(x(t))$ et donc $\Gamma^+(x(t))$ est un anneau dans le plan u, u' sans l'origine. On peut tirer la conclusion B , théorème 2, directement de (12) et de cette remarque, voir [1], et évidemment on a aussi C .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LEVIN, J. J., A. J. NOHEL, On a nonlinear delay equation. *J. Math. Anal. Appl.*, ., 1964, 31-44.
- [2] HALE, J. K., Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations. *J. Diff. Equ.*, 1, 1965, 452-82.
- [3] MILLER, R. K., Asymptotic behaviour of nonlinear delay-differential equations. *J. Diff. Equ.*, 1, 1965, 293-305.
- [4] VOGEL, Th., *Sur quelques types de systèmes évolutifs non dynamiques*. Inst. Etud. Sup. OTAN, Padoue, sept. 1965, 55 p.

(Reçu le 1^{er} août 1966)

University of Wisconsin
Madison, Wis.