Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1966)

Heft: 3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN SYSTÈME NON-LINÉAIRE INTÉGRO-DIFFÉRENTIEL DE LA DYNAMIQUE DES RÉACTEURS NUCLÉAIRES

Autor: Nohel, John A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40737

UN SYSTÈME NON-LINÉAIRE INTÉGRO-DIFFÉRENTIEL DE LA DYNAMIQUE DES RÉACTEURS NUCLÉAIRES

par John A. NOHEL *)

Considérons le système

$$(1) \qquad u'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, T(x,t)\, dx\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \eta(x)\, g\big(u(t)\big),$$

$-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$, avec les valeurs initiales

$$(2) \qquad u(0) = u_0\,, \qquad T(x, 0^+) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty)\,.$$

Les fonctions α, η, f, g et la constante u_0 sont données; on cherche les fonctions $u(t)$, $\mathrm{T}(x, t)$ définies sur $0 < t < \infty$, $-\infty < x < \infty$ et satisfaisant (1) et (2).

Nous nous intéressons aux problèmes d'existence globale, d'unicité et de comportement qualitatif des solutions quand $t \to \infty$. En effet, on peut étudier le système (1), (2) en se servant de la théorie qualitative pour certaines équations du type de Volterra que nous avons déjà exposée [1]. Mais cette théorie n'est pas suffisante pour toute l'analyse; dès lors nous présentons un exposé presque tout à fait indépendant. Cet exposé est basé sur un article [2] que le Professeur Jacob J. Levin et moi avons récemment complété.

Nous supposons que

$$(3) \qquad g(u) \in C(-\infty, \infty)\,, \qquad ug(u) > 0 \qquad (u \neq 0)\,,$$

$$G(u) = \int_0^u g(\sigma)\, d\sigma \to \infty \,(|\, u\,| \to \infty)\,,$$

et

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha, \eta, f \in L_2(-\infty, \infty) \\ \eta \text{ satisfasse localement une condition de Hölder;} \end{cases}$$

dans les problèmes nucléaires $g(u) = e^u - 1$.

*) The preparation of this lecture was supported by the Air Force Office of Scientific Research Grant AF - AFOSR - 925 - 65.

Avec $g(u) \in C(-\infty, \infty)$ et (4) on peut préciser le calcul formel suivant et démontrer l'existence d'une solution locale (par rapport à t). Soit $u(t)$, $T(x, t)$ une solution du problème (1), (2) sur $0 \leqq t \leqq t_0$, $-\infty < x < \infty$, $t_0 > 0$.

La théorie de l'équation de la chaleur et (4) donnent que la fonction

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t) f(\xi)\, d\xi + \tag{5}$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau)\, \eta(\xi)\, g(u(\tau))\, d\xi\, d\tau$$

où

$$K(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right);$$

satisfait la deuxième équation de (1) et $T(x, 0^+) = f(x)$ en chaque point de continuité de f (et aussi dans L_2). Substituant (5) dans la première équation de (1) on arrive à l'équation:

$$u'(t) = -\int_0^t a(t-\tau)\, g(u(\tau))\, d\tau - b(t) \qquad (0 < t \leqq t_0), \tag{6}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} a(t) &= \int_0^{\infty} \exp(-x^2 t)\, h_1(x)\, dx, \quad b(t) = \int_0^{\infty} \exp(-x^2 t)\, h_2(x)\, dx \\ h_1(x) &= Re\, \hat{\alpha}(-x)\, \hat{\eta}(x), \quad h_2(x) = Re\, \hat{\alpha}(-x)\, \hat{f}(x) \end{aligned}\right. \tag{7}$$

et $\hat{}$ désigne la transformation de Fourier; évidemment, les fonctions $a(t)$, $b(t)$ sont continues, $0 \leqq t < \infty$.

La rigueur du calcul précédent est basée sur le fait (voir par exemple [3]) que (6) a (au moins) une solution $u(t)$ satisfaisant $u(0) = u_0$ et la solution existe sur $0 < t \leqq t_0$ pour un $t_0 > 0$; ensuite toutes les opérations précédentes sont réversibles.

On montre facilement (voir [4] pour le cas linéaire) le résultat suivant concernant l'unicité.

Théorème 1.

Si (4) *est satisfaite et l'équation* (6) *a au plus une solution* $u(t)$, $(u(0) = u_0)$, *qui existe sur* $0 < t \leqq t_0$ *pour un* $t_0 > 0$, *il existe au plus une solution* $u(t)$, $T(x, t)$, $0 < t \leqq t_0$, $-\infty < x < \infty$, *telle que*

$$u'(t) \text{ existe sur } 0 < t \leqq t_0, \lim_{t \to 0+} u(t) = u_0,$$

$$T(x, t)\, T_t(x, t),\, T_{xx}(x, t) \in C(-\infty < x < \infty,\, 0 < t \leqq t_0),$$

$$T(x, t) \in L_2(-\infty, \infty) \quad \text{et} \quad \sup_{0 < t \leqq t_0} \int_{-\infty}^{\infty} T^2(x, t)\, dx < \infty,$$

$$\lim_{t \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} |T(x, t) - f(x)|^2\, dx.$$

Pour le comportement qualitatif, supposons

$$(8)\begin{cases} \text{qu'il existe une fonction } h_3(x),\ 0 \leqq x < \infty \text{ et une constante } \Lambda \text{ telle que} \\ h_2^2(x) \leqq h_1(x)\, h_3(x),\ h_1(x) \geqq 0,\ h_3(x) \geqq 0, \\ \int_0^{\infty} h_1(x)\, dx > 0,\ h_3(x) \in L_1(0, \infty),\ \Lambda > 0: \\ h_1(x)\, \xi^2 + 2 h_2(x)\, \xi + h_3(x) \geqq \Lambda [\,|\hat{\eta}(x)|^2 \xi^2 \end{cases}$$

$$+ 2\, Re(\hat{f}(x)\, \hat{\eta}(-x)\, \xi + |(\hat{f}(x)|^2],$$

et montrons le résultat principal:

Théorème 2.

Si les conditions (3), (4), (8) *sont satisfaites, il existe une solution de* (1), (2) *sur* $-\infty < x < \infty$, $0 \leqq t < \infty$ *et*

$$\lim_{t \to \infty} u^{(k)}(t) = 0, \quad (k = 0, 1, 2) \tag{9}$$

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{-\infty < x < \infty} |T(x, t)| = 0. \tag{10}$$

Démonstration.

Pour rendre cette démonstration plus facile, supposons aussi

$$\alpha' \in L_2(-\infty, \infty).$$

Quelle que soit la démonstration, le but est premièrement de prolonger la solution locale à l'intervalle $0 \leqq t < \infty$ et deuxièmement d'établir (9) et (10). C'est dans la démonstration de (9), que cette démonstration est différente.

Soit $u(t)$ une solution locale de (6) satisfaisant $u(0) = u_0$. Définissons

$$(11) \qquad V(t) = G(u(t)) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[h_1(x)\gamma^2(x,t) + 2\,h_2(x)\gamma(x,t) + \right.$$
$$\left. + \, h_3(x)\right] \exp(-2x^2 t)\, dx\,,$$

où

$$\gamma(x,t) = \int_0^t g(u(s)) \exp(x^2 s)\, ds\,.$$

Alors $V(t)$ est définie sur un intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$ et $V(t) \geqq 0$.

Il s'ensuit de (6) et (11) que

$$(12) \qquad V'(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[h_1(x)\gamma^2(x,t) + \right.$$
$$\left. + \, 2h_2(x)\gamma(x,t) + h_3(x)\right] x^2 \exp(-2x^2 t)\, dx\,,$$

et $V'(t) \leqq 0$, $0 \leqq t \leqq t_0$. Dès lors on a

$$(12^*) \qquad V(t) \leqq V(0) = G(u_0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty h_3(x)\, dx\,,$$

une constante indépendante de t_0. A l'aide d'un lemme [3, lemma 1.2] il s'ensuit qu'on peut prolonger la solution $u(t)$ de (6) à l'intervalle $0 \leqq t < \infty$ et en employant (5) on obtient l'existence d'une solution globale. Bien entendu les formules (11), (12), (12*) sont valables sur $0 \leqq t < \infty$; d'ailleurs l'hypothèse (3) et (12*) impliquent qu'il existe une constante $k = k(u_0)$ (indépendante de t_0) telle que

$$(13) \qquad |u(t)| \leqq k \quad (0 \leqq t < \infty)\,.$$

Dès lors on peut aussi montrer qu'il existe une constante k_1 telle que

$$(14) \qquad V''(t) \leqq k_1 \quad (v \leqq t < \infty)\,,$$

où v est un nombre assez grand. Il s'ensuit de $V(t) \geqq 0$, $V'(t) \leqq 0$ et (14):

$$\lim_{t\to\infty} V'(t) = 0\,. \tag{15}$$

Nous montrons (10) en utilisant l'inégalité (facilement montrée)

$$\sup_{-\infty<x<\infty} T^4(x,t) \leqq 4\int_{-\infty}^{\infty} T^2(x,t)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} T_x^2(x,t)\,dx\,. \tag{16}$$

On a de (5)

$$\hat{T}(x,t) = \hat{f}(x)\exp(-x^2 t) + \hat{\eta}(x)\int_0^t g(u(\tau))\exp[-x^2(t-\tau)]\,d\tau$$

et

$$|\hat{T}(x,t)|^2 = \{|\hat{\eta}(x)|^2\gamma^2(x,t) + 2Re\hat{f}(x)\hat{\eta}(-x)\gamma(x,t)$$

$$+ |\hat{f}(x)|^2\}\exp(-2x^2 t)\,.$$

Une comparaison avec (11), les résultats précédents et (8) donnent:

$$V(0) \geqq V(t) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}[h_1(x)\gamma^2(x,t) + h_2(x)\gamma(x,t) +$$

$$+ h_3(x)]\exp(-2x^2 t)\,dx$$

$$\geqq \frac{\Lambda}{2\pi}\int_0^{\infty}[|\hat{\eta}(x)|^2\gamma^2(x,t) + 2\,Re\hat{f}(x)\hat{\eta}(-x)\gamma(x,t)$$

$$+\hat{f}(x)]^2\exp(-2x^2 t)\,dx = \frac{\Lambda}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{T}(x,t)|^2\,dx\,;$$

dès lors

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^2(x,t)\,dx \leqq \frac{2V(0)}{\Lambda}\,. \tag{17}$$

Un calcul similaire donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_x^2(x,t)\,dx \leqq -\frac{V'(t)}{\Lambda}\,, \tag{18}$$

et on obtient (10) de (15), (16), (17), (18).

Pour montrer (9) on commence avec le cas $k = 1$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $X > 0$, tel que

$$\int_X^\infty \alpha^2(x)\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^{-X} \alpha^2(x)\,dx \leqq \varepsilon\,.$$

Employant l'inégalité de Schwarz et (17) on a:

$$|\int_X^\infty \alpha(x)\,T(x,t)\,dx\,|^2\,, \quad |\int_{-\infty}^{-X} \alpha(x)\,T(x,t)\,dx\,|^2 \leqq \frac{2}{\Lambda}\,V(0)\,\varepsilon\,, \quad (0 \leqq t < \infty)\,;$$

et aussi

$$|\int_{-X}^{X} \alpha(x)\,T(x,t)\,dx\,| \leqq \sup_{-\infty<x<\infty} |\,T(x,t)\,|\,\{\,2X\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x)\,dx\,\}^{1/2}$$

Il s'ensuit de la première équation (1) et de (10) (déjà démontrée) qu'il existe un nombre $t_1 = t_1(\varepsilon)$ tel que

$$|\,u'(t)\,| = |\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\,T(x,t)\,dx \leqq 3\left[\,\frac{2}{\Lambda}\,V(0)\,\varepsilon\right]^{1/2} \qquad (t_1 \leqq t < \infty)\,;$$

c'est ce qui démontre (9) pour $k = 1$.

En employant le théorème de Parseval dans la première équation de (1), on obtient:

$$u'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}(-x)\,\hat{T}(x,t)\,dx$$

et en faisant la différentiation et utilisant la formule pour $\hat{T}_t(x,t)$, on obtient

$$u''(t) + \gamma g\big(u(t)\big) = \frac{1}{2\pi}\,I(t) \qquad (0 < t < \infty) \tag{19}$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}(x)\,\hat{\alpha}(-x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty h_1(x)\,dx > 0\,, \tag{20}$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\hat{\alpha}(-x)\,\hat{T}(x,t)\,dx \tag{21}$$

$$= -\,2\pi\int_{\infty -}^{\infty} \alpha(x)\,T_{xx}(x,t)\,dx \qquad (0 \leqq t < \infty)\,.$$

L'estimation (18) donne

$$I^2(t) \leqq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \,|\, \hat{\alpha}(-x)\,|^2\, dx \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \,|\, \hat{T}(x,t)\,|^2\, dx$$

$$\leqq -\frac{4\pi^2}{\Lambda} V'(t) \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha'(x))^2\, dx\,,$$

dès lors (15) et $\alpha' \in L_2$ donnent

(22) $$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0\,.$$

Supposons que $u(t) \not\to 0$ quand $t \to \infty$. Puisque u est bornée, il existe un nombre $u^* \neq 0$, $|u^*| \leqq k$ (k définie par (13)) et une suite $\{ t_n \} \to \infty$ quand $n \to \infty$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} u(t_n) = u^*\,.$$

Pour fixer les idées, supposons que $u^* > 0$. Par la formule des accroissements finis et (9, $l = 1$), déjà démontrée, on trouve qu'il existe une suite $\Delta_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et un nombre entier $N_1 \geqq 1$ tels que

$$\tfrac{1}{2} u^* \leqq u(t) \leqq k \qquad (t_n \leqq t < t_n + \Delta_n\,, \quad n \geqq N_1)\,.$$

Définissons

$$\mu = \min_{\frac{1}{2} u^* \leqq u \leqq k} g(u) > 0\,,$$

où l'inégalité suit de l'hypothèse $u^* > 0$ et la condition (3) est satisfaite. On a aussi

$$\gamma g\big(u(t)\big) \geqq \gamma\mu \qquad (t_n \leqq t \leqq t_n + \Delta_n\,, \quad n \geqq N_1)$$

et, employant (19), (22),

$$u''(t) \leqq -\tfrac{1}{2}\gamma\mu \qquad (t_n \leqq t \leqq t_n + \Delta_n\,, \quad n \geqq N_2)\,,$$

pour un $N_2 \geqq N_1$. Faisant l'intégration de cette inégalité on arrive à

$$u'(t_n + \Delta_n) - u'(t_n) \leqq -\tfrac{1}{2} v\pi\, \Delta_n \qquad (n \geqq N_2)\,,$$

ce qui n'est pas compatible avec $u'(t) \to 0$ quand $t \to \infty$ et $\Delta_n \to \infty$ quand $n \to \infty$; donc, on conclut que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Employant (19), (22) on obtient $\lim_{t\to\infty} u''(t) = 0$, ce qui démontre (9) et le Théorème 2.

Remarquons que le théorème donne des conditions suffisantes pour la stabilité globale (aussi absolue) de la solution équilibre $u(t) \equiv 0, T(x, t) \equiv 0$ de (1). La condition (8) est satisfaite dans plusieurs cas des réacteurs nucléaires, un cas très simple mais important étant $\alpha(x) = k\,\eta(x)$, $k > 0$ constant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Levin, J. J. and J. A. Nohel, Perturbations of a nonlinear Volterra equation. *Mich. Math.*, *12* (1965), 431-447.

[2] —— and J. A. Nohel, A system of nonlinear integro-differential equations, *Mich. Math. J.* 13 (1966), 257-270.

[3] Nohel, J. A., Some problems in nonlinear Volterra integral equations. *Bull. Amer. math. Soc.*, *68*, (1962), 323-9.

[4] Levin, J. J. and J. A. Nohel, On a system of integro-differential equations occuring in reactor dynamics II. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, *11*, (1962), 210-43.

(Reçu le 1er août 1966.)

University of Wisconsin
Madison, Wis.