

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG
Autor: Domiaty, R. Z.
Kapitel: 6. Weitere Folgerungen
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40727>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^{n-1} * d_{n,m}^{-1} + d_{n,n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} * d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{n-1} * d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty} * d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n+n} + a_n - \sum_{m=n}^{\infty} * d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n+n} + c - a + \sum_{m=n}^{\infty} * d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty} * d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n+n} + c - a,
 \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) - z(x_0) = c - a$$

oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = c.$$

Damit ist auch (A_3) bewiesen.

(A_1) , (A_2) und (A_3) ergeben mit Hilfssatz 1 gerade die Behauptung unseres Satzes 1.

6. WEITERE FOLGERUNGEN

Es sei E die Menge aller $x \in (0,1)$, für die $z(x) < \infty$ ist und F die Menge aller $x \in (0,1)$, für die $z(x) = \infty$ ist. Trivialerweise gilt

$$E \cap F = \emptyset \quad \text{und} \quad E \cup F = (0,1).$$

Die Lage von E und F in $(0,1)$ beschreibt der folgende

SATZ 2. *Jeder Punkt $x \in (0,1)$ ist ein Kondensationspunkt der Menge E und auch der Menge F . (Genauer: In jeder Umgebung von x kann man eine Teilmenge von F bzw. G angeben, die die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.)*

Insbesondere ist damit $(0,1)$ in zwei elementefremde Teilmengen der Mächtigkeit des Kontinuums zerlegt worden, die beide in $(0,1)$ dicht liegen.

Beweisskizze. Satz 2 ist bewiesen, wenn man zeigt, dass zu zwei beliebigen Punkten x_1 und x_2 ($x_1 < x_2$) aus $(0,1)$ eine konti-

nuumsmächtige Teilmenge $E^* \subseteq E$ und eine kontinuumsmächtige Teilmenge $F^* \subseteq F$ existieren, die in (x_1, x_2) liegen. Es sei

$$x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}), \quad x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}), \quad i = i(x_1, x_2) \text{ und } d_{1,i} > d_{2,i}.$$

Unter (p_k) wollen wir im weiteren eine unendliche Folge verstehen, die aus der Folge (2^k) durch eine beliebige Umordnung entsteht. P sei die Menge aller Folgen (p_k) . P besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, denn P kann als die Menge aller Anordnungen der abzählbar-unendlichen Menge $2^1, 2^2, \dots$ aufgefasst werden, und diese ist von der Mächtigkeit des Kontinuums; vgl. [3], S. 67.

Es sei E^* die Menge aller $y \in (0,1)$, wobei

$$y \leftrightarrow (d_m)$$

mit $(p_k) \in P$ und

$$d_m = \begin{cases} d_{2,m} & \text{für } m \leq i \\ d_{2,i+1} + 1 & \text{für } m = i + 1 \\ p_k & \text{für } m = i + 1 + k. \end{cases}$$

gilt. Diese Menge E^* ist von der Mächtigkeit des Kontinuums, denn man kann jedem $y \in E^*$ genau eine Anordnung $(p_n) \in P$ zuordnen. Nach der Konstruktionsvorschrift ist ferner für jedes $y \in E^*$

$$i(y, x_1) = i, \quad i(y, x_2) = i + 1,$$

$$d_{1,i} > d_i, \quad d_{i+1} > d_{2,i+1}.$$

Also ist

$$x_1 < y < x_2 \quad y \in E^*.$$

Da aber auch

$$\begin{aligned} z(y) &= \sum_{m=1}^i * d_m^{-1} + d_{i+1}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^i * d_{2,m}^{-1} + \frac{1}{d_{2,i+1} + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty \end{aligned}$$

gilt, ist somit die Existenz von E^* bewiesen. Der Existenz-

beweis von F^* verläuft analog, wobei nur anstelle der Folge (2^k) die Folge (k) zu setzen ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Bezeichnet man mit $A(a)$, $0 < a < \infty$, die Menge aller $x \in (0,1)$, für welche $z(x) = a$ ist, so kann man auch den folgenden Satz beweisen.

SATZ 3. 1. *$A(a)$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

2. *$A(a)$ ist nirgends dicht in $(0,1)$.*

Beweisskizze. Zu Punkt 1. Jede positive reelle Zahl a kann in der Form

$$a = r_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-r_j}$$

dargestellt werden, wobei r_0 eine nicht-negative ganze Zahl ist und r_j natürliche Zahlen sind, für die $r_j < r_{j+1}$ gilt ($j = 1, 2, \dots$). Es sei Q die Menge aller Folgen (q_s) , wobei (q_s) Folgen sind, die aus der Folge (2^{r_s}) durch beliebige Umordnungen hervorgehen. M sei die Menge aller $x \in (0,1)$, für die

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

mit $(q_s) \in Q$ und

$$d_m = \begin{cases} q_s & \text{für } m = 2t - 1 \\ 1 & \text{für } m = 2t \text{ und } t \leq n_0 \\ 0 & \text{für } m = 2t \text{ und } t > n_0 \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots$$

gilt. M besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, und für jedes $x \in M$ ist

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{-1} = n_0 + \sum_{s=1}^{\infty} q_s = a .$$

Es ist aber $(0,1) \ni A(a) \ni M$, und somit besitzt auch $A(a)$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

Zu Punkt 2. Man zeigt zunächst (ähnlich wie beim Beweis zu Hilfssatz 4), dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gleichwertig mit $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ ist, wenn man folgendes voraussetzt:

$$x_0 \leftrightarrow (d_m), \quad x_n \leftrightarrow (d_{m,n}), \quad x_n \neq x_0, \quad i_n = i(x_n, x_0) \quad \text{und} \quad (d_m)$$

enthält unendlich viele positive Glieder. Damit beweist man, dass aus

$$z(x_0) = \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

die Aussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = \infty$$

folgt. Den Beweis, dass $A(a)$ nirgends dicht in $(0,1)$ ist, führt man dann indirekt. Aus der gegenteiligen Annahme folgt, dass eine Umgebung $U_0 \subseteq (0,1)$ existiert, in der $A(a)$ dicht liegt. Da nach Satz 2 die Menge F in $(0,1)$ dicht liegt, liegt F auch U_0 dicht. Nun sei $y \in U_0 \cap F$. Es ist dann

$$z(y) = \infty.$$

Weil $A(a)$ in U_0 dicht, liegt muss es eine Folge $(y_n) \subset A(a)$ geben, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ist. Nach dem obigen muss dann einerseits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(y_n) = \infty$$

sein. Da aber anderseits für alle n stets $z(y_n) = a$ ist, gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(y_n) = a.$$

Das stellt einen Widerspruch gegen unsere Annahme dar. Somit ist diese Annahme falsch und damit unser Satz bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HAHN, H. *Reelle Funktionen*, Teil I. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932.
- [2] ALEXANDROFF, P. S. *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956
- [3] KAMKE, E. *Mengenlehre*, Sammlung Göschen Bd. 999/999a. Verlag Walter de Gruyter, Berlin 1955

(Reçu le 10 avril 1965)

Dr. R. Z. Domiaty
Technische Hochschule
Graz