

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 12 (1966)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG  
**Autor:** Domiaty, R. Z.  
**Kapitel:** 5. KONSTRUKTION EINER LÖSUNG VON (2)  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-40727>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Für alle  $n$  gilt demnach

$$x - x_{\lambda_n} \geq 2^{-(d_1 + \dots + d_{k+1} + k + 1)} > 0.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\liminf (x - x_{\lambda_n}) > 0,$$

d.h. die Folge  $(x_n)$  kann nicht gegen  $x$  konvergieren. Damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Annahme, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$  nicht gilt. Somit ist diese Annahme falsch und der Hilfssatz bewiesen.

## 5. KONSTRUKTION EINER LÖSUNG VON (2)

Es sei  $(d_m)$  eine  $Z$ -Folge aus  $D$ . (Siehe Abschnitt 2). Jeder solchen Folge kann man einen Ausdruck

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} {}^* d_m^{-1} \quad (5)$$

zuordnen. Dabei bedeutet  $\sum_m {}^*$  die Summe über alle  $m$ , für die  $d_m \neq 0$  ist. Es lässt sich zeigen, dass  $z$  entweder eine positive reelle Zahl ist oder  $\infty$ . Denn nach Definition einer  $Z$ -Folge  $(d_m)$  sind alle  $d_m$  nicht negativ, und mindestens ein  $d_m$  ist von Null verschieden. Die Folge der Partialsummen

$$\left( \sum_{m=1}^M {}^* d_m^{-1} \right)$$

ist daher eine monoton steigende Folge. Also ist  $z$  entweder konvergent oder bestimmt divergent. Es gilt daher

$$z \in (0, \infty].$$

Nach den Überlegungen im Abschnitt 3 kann man jeder reellen Zahl aus  $(0,1)$  in eindeutiger Weise eine  $Z$ -Folge aus  $D$  zuordnen. Somit kann man mit (5) auf folgende Art eine positive reelle Funktion erklären: Wenn

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

ist, so soll

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} {}^*d_m^{-1} \quad (6)$$

sein.

Für diese Funktion gilt

$$0 < z(x) \leq \infty \quad x \in (0,1). \quad (7)$$

Jetzt beweisen wir den folgenden

**SATZ 1.**  *$z(x)$  ist eine nichttriviale Lösung der Funktionalgleichung (2).*

*Beweis.* Der Beweis wird in drei Schritten geführt.

1. *Schritt.* Es wird folgende Aussage bewiesen:

(A<sub>1</sub>) Wenn  $x_0 \in (0,1)$ ,  $z(x_0) = \infty$ ,  $(x_n) \subset (0, x_0)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  ist, dann gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = \infty$ .

Es sei  $x_0 \leftrightarrow (d_m)$ ,  $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$  und  $i_n = i(x_n, x)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Nach Hilfssatz 4 ist Aussage  $\lim x_n = x_0$  gleichbedeutend mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ . Unter Beachtung der Voraussetzung

$$z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} {}^*d_m^{-1}$$

kann man jetzt zeigen, dass  $z(x_n)$  beliebig gross gemacht werden kann, wenn man nur  $n$  genügend gross wählt; zu einer beliebig grossen Zahl  $K > 0$  wählen wir eine natürliche Zahl  $M$  so, dass

$$K < \sum_{m=1}^M {}^*d_m^{-1}$$

ist. Weiter wählen wir eine zweite genügend grosse natürliche Zahl  $N$  so, dass

$$i_n > M \quad n > N$$

ist. Betrachten wir jetzt solche  $x_n$ , für die  $n > N$  ist, so erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} z(x_n) &= \sum_{m=1}^{\infty} {}^*d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^M {}^*d_{n,m}^{-1} + \sum_{m=M+1}^{\infty} {}^*d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^M {}^*d_m^{-1} \\ &+ \sum_{m=M+1}^{\infty} {}^*d_{n,m}^{-1} > K. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = \infty,$$

und somit ist  $(A_1)$  verifiziert.

2. *Schritt.* Es wird gezeigt:

$(A_2)$  Wenn  $x_0 \in (0,1)$  und  $z(x_0) = a < \infty$  ist, dann gilt für alle Folgen  $(x_n) \subset (0, x_0)$ , die die Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  erfüllen, die Beziehung

$$\liminf z(x_n) \geq z(x_0).$$

Wir beweisen  $(A_2)$ , indem wir die gegenteilige Annahme zu einem Widerspruch führen. Aus dieser Annahme kann man folgern: Es gibt einen Punkt  $x_0$  und eine Folge  $(x_n) \subset (0, x_0)$ , für welche gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = b < z(x_0) = a.$$

Die entsprechenden  $Z$ -Folgen seien

$$\left. \begin{array}{l} x_0 \leftrightarrow (d_m) \\ x_n \leftrightarrow (d_{n,m}) \\ i_n = i(x_n, x_0) \end{array} \right\} n = 1, 2, \dots$$

Danach  $(A_2)$  die Beziehung  $x_n < x_0$  gilt, können wir wieder Hilfssatz 4 anwenden, und erhalten wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty.$$

Weil  $z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{-1} = a$  ist, folgt nach bekannten Sätzen

über unendliche Reihen, dass ein  $K$  angegeben werden kann, für das

$$\sum_K^{\infty} d_m^{-1} < \frac{a-b}{2}$$

gilt. (Ein solches  $K$  existiert, da  $a - b > 0$  ist.) Weiter wählen wir zu diesem  $K$  ein  $N$  derart, dass

$$i_n > K \qquad n > N$$

ist. Für diese Werte  $N$ ,  $K$  und  $n > N$  schätzen wir jetzt die folgende Differenz ab:

$$\begin{aligned} z(x_0) - z(x_n) &= \sum_{m=1}^{\infty} * d_m^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty} * d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^{K-1} * d_m^{-1} + \sum_{m=K}^{\infty} * d_m^{-1} - \sum_{m=1}^{K-1} * d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty} * d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=K}^{\infty} * d_m^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty} * d_{n,m}^{-1} < \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

Es gilt daher

$$z(x_0) - z(x_n) < \frac{a-b}{2} \qquad n > N.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} \leq \frac{a-b}{2},$$

und dieses Resultat steht wegen unserer Annahme  $b < a$  im Widerspruch zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} = a - b.$$

Es ist somit  $b < a$  falsch und daher  $(A_2)$  richtig.

3. *Schritt.* Nun zeigen wir:

$(A_3)$  Wenn  $x_0 \in (0,1)$  und  $z(x_0) = a < \infty$  ist, dann gibt es zu jedem  $c \geq a$  eine Folge  $(x_n) \subset (0, x_0)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = c$ .

Um  $(A_3)$  zu beweisen, greifen wir wieder ein  $c \geq a$  und beliebiges  $x_0 \in (0,1)$  heraus. Dann werden wir eine Folge  $(x_n) \subset (0, x_0)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  konstruieren, für die gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = c.$$

Dem  $x_0$  sei die  $Z$ -Folge  $(d_m)$  zugeordnet. Nun stellen wir die Folgenglieder  $x_n$  wieder durch  $Z$ -Folgen dar,

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}) \quad n = 1, 2, \dots$$

Die  $d_{n,m}$  werden nach folgender Vorschrift bestimmt:

$$(W_1) \quad \begin{aligned} d_{n,m} &= d_m & n &= 1, 2, 3, \dots \\ d_{n,n} &= d_n + n & n &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Damit sind aber in jeder  $Z$ -Folge  $(d_{n,m})$  erst die ersten  $n$  Folgenglieder festgelegt. Die restlichen werden auf die folgende Art bestimmt: Wir setzen

$$a_n = c - a + \sum_{m=n}^{\infty} d_m^{-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

Die  $d_{n,m}$ ,  $m > n$ , sollen so bestimmt werden, dass

$$(W_2) \quad \sum_{m=n+1}^{\infty} d_{n,m}^{-1} = a_n \quad n = 1, 2, \dots$$

ist. (Falls alle  $a_n = 0$  sind, werden alle  $d_{n,m} = 0$  gewählt, und die linke Seite wird gleich null gesetzt). Nicht-negative ganze Zahlen  $d_{n,m}$  so zu finden, dass  $(W_2)$  erfüllt ist, ist im allgemeinen sogar auf unendlich viele Arten möglich.

Hat man jetzt ein System von Folgen  $(d_{n,m})$  nach  $(W_1)$  und  $(W_2)$  gefunden, so erfüllt die diesen  $Z$ -Folgen zugeordnete Folge  $(x_n)$  die Bedingungen

$$x_n < x_0,$$

weil nach  $(W_1)$   $i_n = i(x_n, x_0) = n$  und  $d_{n,m} > d_n$  ist, [vgl. (B) Abschnitt 4] und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

weil nach  $(W_1)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$  ist [vgl. Hilfssatz 2 (b)]. Ausserdem gilt unter Verwendung von  $(W_1)$  und  $(W_2)$ :

$$z(x_n) - z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{-1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^{n-1} {}^* d_{n,m}^{-1} + d_{n,n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} {}^* d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{n-1} {}^* d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty} {}^* d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n + n} + a_n - \sum_{m=n}^{\infty} {}^* d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n + n} + c - a + \sum_{m=n}^{\infty} {}^* d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty} {}^* d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n + n} + c - a,
 \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) - z(x_0) = c - a$$

oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = c.$$

Damit ist auch  $(A_3)$  bewiesen.

$(A_1)$ ,  $(A_2)$  und  $(A_3)$  ergeben mit Hilfssatz 1 gerade die Behauptung unseres Satzes 1.

## 6. WEITERE FOLGERUNGEN

Es sei  $E$  die Menge aller  $x \in (0,1)$ , für die  $z(x) < \infty$  ist und  $F$  die Menge aller  $x \in (0,1)$ , für die  $z(x) = \infty$  ist. Trivialerweise gilt

$$E \cap F = \emptyset \quad \text{und} \quad E \cup F = (0,1).$$

Die Lage von  $E$  und  $F$  in  $(0,1)$  beschreibt der folgende

**SATZ 2.** *Jeder Punkt  $x \in (0,1)$  ist ein Kondensationspunkt der Menge  $E$  und auch der Menge  $F$ . (Genauer: In jeder Umgebung von  $x$  kann man eine Teilmenge von  $F$  bzw.  $G$  angeben, die die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.)*

Insbesondere ist damit  $(0,1)$  in zwei elementefremde Teilmengen der Mächtigkeit des Kontinuums zerlegt worden, die beide in  $(0,1)$  dicht liegen.

*Beweisskizze.* Satz 2 ist bewiesen, wenn man zeigt, dass zu zwei beliebigen Punkten  $x_1$  und  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) aus  $(0,1)$  eine konti-