

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 12 (1966)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG  
**Autor:** Domiaty, R. Z.  
**Kapitel:** 4. SÄTZE ÜBER DAS RECHNEN MIT Z-FOLGEN  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-40727>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

#### 4. SÄTZE ÜBER DAS RECHNEN MIT Z-FOLGEN

Die eindeutige Zuordnung der reellen Zahlen aus  $(0,1)$  zu den Z-Folgen aus  $D$  schreiben wir abgekürzt in der Form

$$x \leftrightarrow (d_m) \quad x \in (0,1), \quad (d_m) \in D.$$

Damit ist gemeint, dass  $(d_m)$  die der Zahl  $x$  gemäss (Z) zugeordnete Z-Folge ist. Daraus kann man sofort folgende Aussage ableiten:

(A) Wenn  $x_1 \leftrightarrow (d_{1,m})$  und  $x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$  ist, so ist  $x_1 = x_2$  gleichbedeutend mit  $d_{1,m} = d_{2,m}$  für alle  $m = 1, 2, 3, \dots$

Das gibt jetzt Anlass zu der

DEFINITION 1. Die natürliche Zahl  $i = i(x_1, x_2)$  heisst der Index zweier verschiedener reeller Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  aus  $(0,1)$ , wenn folgendes gilt:

$$1. \quad x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}) \text{ und } x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$$

$$2. \quad d_{1,i} \neq d_{2,i}$$

3. Wenn  $i > 1$  ist, so sei auch  $d_{1,k} = d_{2,k}$  für alle  $k = 1, 2, \dots, i - 1$ .

Mit dieser Bezeichnung gilt jetzt

(B) Es sei

$$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}), \quad x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}) \text{ und } i = i(x_1, x_2).$$

Dann ist  $x_1 > x_2$  gleichbedeutend mit  $d_{1,i} < d_{2,i}$ .

HILFSSATZ 2. a) Es sei  $x \leftrightarrow (d_m)$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $k(\varepsilon)$  derart, dass für alle  $y \in (0,1)$  aus der Beziehung  $i(x, y) > k$  die Beziehung  $|x - y| < \varepsilon$  folgt.

b) Es sei

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}), \quad x \leftrightarrow (d_m), \quad x_n \neq x \text{ und } i_n = i(x_n, x)$$

für  $n = 1, 2, \dots$ . Dann folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$  die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

*Beweis.* Da *b)* unmittelbar aus *a)* folgt, genügt es, *a)* zu beweisen.  $\varepsilon > 0$  sei beliebig und fest. Wir wählen jetzt eine natürliche Zahl  $k$  so, dass  $\varepsilon > 2^{1-k}$  ist, und betrachten nur solche  $y$  aus  $(0,1)$ , für die  $i(x, y) \geq k + 1$  ist. Ein solches  $y$  greifen wir heraus. Die zugeordnete *Z-Folge* sei  $(d_m^*)$ , und der Index sei  $i^*$ . Dann kann man die Differenz  $|x - y|$  vermöge (3) abschätzen:

$$\begin{aligned} |x - y| &= |2^{-(d_1 + \dots + d_{k+1} + k + 1)} + 2^{-(d_1 + \dots + d_{k+2} + k + 2)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_1^* + \dots + d_{k+1}^* + k + 1)} - 2^{-(d_{k+1}^* + \dots + d_{k+2}^* + k + 2)} - \dots| \\ &\leq 2^{-(d_1 + \dots + d_k + k + 1)} [2^{-d_{k+1}} + 2^{-(d_{k+1} + d_{k+2} + 1)} + \dots \\ &\quad + 2^{-d_{k+1}^*} + 2^{-(d_{k+1}^* + d_{k+2}^* + 1)} + \dots] \\ &\leq 2^{-(d_1 + \dots + d_k + k + 1)} [1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots] \\ &\leq 2^{-(d_1 + \dots + d_k)} 2^{-k+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Aussage *b)* in Hilfssatz 2 nicht umkehrbar ist. Das zeigt das Beispiel

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{-1} + 2^{-5} + 2^{-5-n} \leftrightarrow (d_{n,m}) = (0, 3, n, 0, 0, \dots, 0, \dots) \\ x &= 2^{-1} + 2^{-5} \leftrightarrow (d_m) = (0, 4, 0, 0, \dots, 0, \dots). \end{aligned}$$

Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = 2$ .

Im weiteren benötigen wir oft den bekannten

**HILFSSATZ 3.**  $(q_l)$  sei eine Folge natürlicher Zahlen. Dann ist die Negation der Aussage  $\lim_{l \rightarrow \infty} q_l = \infty$  gleichwertig mit der Aussage, dass in der Folge  $(q_l)$  eine feste natürliche Zahl  $k$  unendlich oft vorkommt.

Weiter brauchen wir den

**HILFSSATZ 4.** Es sei  $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$ ,  $x \leftrightarrow (d_m)$ ,  $x_n < x$  und  $i_n = i(x_n, x)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gleichwertig mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ .

*Beweis.* Wegen Hilfssatz 2, b) haben wir nur zu beweisen, dass unter der angegebenen Voraussetzung aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  die Behauptung  $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$  folgt. Wir führen den Beweis indirekt. Aus der Annahme, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$  nicht gilt, folgt mit Hilfssatz 3, dass es eine natürliche Zahl  $k$  gibt, die in der Folge der  $(i_n)$  unendlich oft vorkommt. Es sei also  $(\lambda_n)$  eine unendliche Teilfolge aus der Folge der natürlichen Zahlen  $(n)$  mit der Eigenschaft

$$i_{\lambda_n} = k \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Für alle  $n$  gilt wegen (4)

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+1)} + 2^{-(d_1+d_2+2)} + \dots + 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+1)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+d_{\lambda_n,2}+2)} - \dots - \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\dots+d_{\lambda_n,2}+k)} - \dots \\ &= 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} + 2^{-(d_1+\dots+d_{k+1}+k+1)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\dots+d_{\lambda_n,k}+k)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\dots+d_{\lambda_n,k+1}+k+1)} - \dots \\ &= 2^{-(d_1+\dots+d_{k-1}+k)} \{ 2^{-d_k} + 2^{-(d_k+d_{k+1}+1)} + \dots \\ &\quad - [2^{-d_{\lambda_n,k}} + 2^{-(d_{\lambda_n,k}+d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \dots] \}. \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung sind alle  $x_{\lambda_n}$  kleiner als  $x$ . Weil für jedes  $\lambda_n$  stets  $i(x_{\lambda_n}, x) = k$  ist, gilt also wegen (B) für alle  $\lambda_n$  die Beziehung

$$d_k + 1 \leq d_{\lambda_n, k}.$$

Setzt man das in die vorhergehende Formel ein, so erhält man für alle  $n$

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} \{ 1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,k}-d_k)} [1 + 2^{-(d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \dots] \} \\ &\geq 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} [1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} - 2^{-1}(1 + 2^{-1} + \dots)] \\ &= 2^{-(d_1+\dots+d_{k+1}+k+1)} > 0. \end{aligned}$$

Für alle  $n$  gilt demnach

$$x - x_{\lambda_n} \geq 2^{-(d_1 + \dots + d_{k+1} + k + 1)} > 0.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\liminf (x - x_{\lambda_n}) > 0,$$

d.h. die Folge  $(x_n)$  kann nicht gegen  $x$  konvergieren. Damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Annahme, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$  nicht gilt. Somit ist diese Annahme falsch und der Hilfssatz bewiesen.

## 5. KONSTRUKTION EINER LÖSUNG VON (2)

Es sei  $(d_m)$  eine  $Z$ -Folge aus  $D$ . (Siehe Abschnitt 2). Jeder solchen Folge kann man einen Ausdruck

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} * d_m^{-1} \quad (5)$$

zuordnen. Dabei bedeutet  $\sum_m^*$  die Summe über alle  $m$ , für die  $d_m \neq 0$  ist. Es lässt sich zeigen, dass  $z$  entweder eine positive reelle Zahl ist oder  $\infty$ . Denn nach Definition einer  $Z$ -Folge  $(d_m)$  sind alle  $d_m$  nicht negativ, und mindestens ein  $d_m$  ist von Null verschieden. Die Folge der Partialsummen

$$\left( \sum_{m=1}^M * d_m^{-1} \right)$$

ist daher eine monoton steigende Folge. Also ist  $z$  entweder konvergent oder bestimmt divergent. Es gilt daher

$$z \in (0, \infty].$$

Nach den Überlegungen im Abschnitt 3 kann man jeder reellen Zahl aus  $(0,1)$  in eindeutiger Weise eine  $Z$ -Folge aus  $D$  zuordnen. Somit kann man mit (5) auf folgende Art eine positive reelle Funktion erklären: Wenn

$$x \leftrightarrow (d_m)$$