Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1966)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG

Autor: Domiaty, R. Z.

Kapitel: 3. Eine Darstellung reeller Zahlen aus (0,1) durgh gewisse folgen

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40727

2. Ein Hilfssatz

Ein wesentliche Rolle wird die folgende Aussage spielen:

Hilfsatz 1. *Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann eine Lösung von (2), wenn für jedes $x_0 \varepsilon (0,1)$ gilt:*

1. *Für jede Folge (x_n) aus $(0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist*

$$\liminf f(x_n) \geqq f(x_0).$$

2. *Für jedes $a \,\varepsilon\, [f(x_0), +\infty]$ gibt es eine Folge (y_n) aus $(0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = a$.*

Beweis. a) Wenn $f(x)$ eine Lösung von (2) ist, folgen die beiden Aussagen unseres Hilfssatzes unmittelbar aus der Bedeutung von $L_f(x_0)$ in (1).

b) Jetzt sei $f(x)$ eine Funktion, die die Eigenschaften 1. und 2. besitzt. x_0 sei ein beliebiger Punkt aus (0,1). Wir zeigen, dass $L_f(x_0) = [f(x_0), +\infty]$ ist. Wegen 1. gilt

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0,x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \subseteq [f(x_0), +\infty],$$

und wegen 2. auch

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0,x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \supseteq [f(x_0), +\infty].$$

Daraus folgt unsere Behauptung.

3. Eine Darstellung reeller Zahlen aus (0,1) durch gewisse Folgen

Um eine nichttriviale Lösung von (2) zu konstruieren, benötigen wir eine spezielle Darstellung der reellen Zahlen aus (0,1), die von den üblichen Darstellungen abweicht. Bekanntlich kann man die Zahlen aus (0,1) eineindeutig durch nicht-abbrechende Dualbrüche darstellen. Wenn also r eine beliebige reelle Zahl aus (0,1) ist, gilt

$$r = 0,\delta_1\,\delta_2\,\delta_3 \ldots \delta_i \ldots \qquad \delta_i = 0 \textit{ oder } 1$$

mit den folgenden zwei Eigenschaften:

(E_1) Es gibt einen Index m, $m \geqq 1$, für den $\delta_m = 0$ ist.

(E_2) In der Folge der Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i, \ldots$ kommt die Zahl 1 unendlich oft vor.

Die Aussage (E_1) trifft zu, weil $r \neq 1$ ist. (E_2) ist erfüllt, weil wir abbrechende Dualbrüche ausgeschlossen haben.

Jeder solchen Dualbruchentwicklung und damit jeder reellen Zahl aus (0,1) können wir in eindeutiger Weise eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, in der mindestens ein positives Element vorkommt, auf die folgende Art zuordnen:

(Z) Wenn $r \varepsilon (0,1)$ ist und die Dualbruchentwicklung

$$r = 0,\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_i \ldots = 0,\underbrace{0\ldots0}_{\substack{d_1\\ \text{Nullen}}}1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{d_2\\ \text{Nullen}}}1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{d_3\\ \text{Nullen}}}1 0\ldots$$

mit den Eigenschaften (E_1) und (E_2) besitzt, dann wird der Zahl r die Folge (d_m) zugeordnet. Diese Folge nennen wir im weiteren die *zugeordnete Folge*, kurz: die Z-Folge, von r.

D sei die Menge aller Folgen (d_m) mit den Eigenschaften:

(Z_1) Für alle m ist d_m eine nichtnegative ganze Zahl.

(Z_2) Es gibt einen Index q, für den $d_q > 0$ ist.

Dann stellt die Zuordnungsvorschrift (Z) eine eineindeutige Abbildung von (0,1) auf D dar.

Wir können daher mit der gleichen Berechtigung, mit der wir eine reelle Zahl r aus (0,1) durch einen Dualbruch darstellen, jetzt eine reelle Zahl durch die ihr nach (Z) zugeordnete Z-Folge aus D darstellen.

Die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl r, die einer Z-Folge (d_m) aus D zugeordnet ist, kann man mittels der Formel

$$r = \sum_{M=1}^{\infty} 2^{-\left\{M + \sum\limits_{m=1}^{M} d_m\right\}} \tag{3}$$

angeben.