Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOME APPLICATIONS OF THE GAUSS-LUCAS THEOREM
Autor: Rubel, L. A.
Bibliographie
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40726

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Proof. It is enough to prove that f has a zero, and we may clearly suppose that $n_0 = 0$. From the proceding result, we see that the n_k-th partial sum of the power series for f has a zero in the disc

$$|z| \leqq \left\{ \frac{|a_0|}{|a_1|} \frac{1}{\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\left(1 - \frac{n_1}{n_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{n_1}{n_k}\right)} \right\}^{1/n_k}.$$

But since $\sum 1/n_k < \infty$, the product $\prod_2^\infty (1 - (n_1/n_k))$ converges, so that there is a fixed disc with center at the origin that contains a zero of the n_k-th partial sum for $k = 2, 3, 4, \ldots$. It follows that f has a zero in this disc, and the result is proved.

It should be pointed out that Biernacki [1] proved, under the same hypotheses, and using a stronger form of the Gauss-Lucas Theorem, that f takes each complex value infinitely often. It is likely that our method can give a slight improvement of the preceding result, but not to the full strength of Biernacki's result. A recent result of G. and M. Weiss [5] gives a partial analogue for functions regular in the unit disc.

REFERENCES

[1] Biernacki, M., Sur les zéros des polynômes et sur les fonctions entières dont le développement taylorien présente des lacunes. *Bull. Soc. Math. France* (2), 69 (1945), pp. 197-203.

[2] Edrei, A., Power series having partial sums with zeros in a half plane. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), pp. 320-324.

[3] Fejér, L., Ueber die Wurzel von kleinsten absoluten Betrage einer algebraischer Gleichung. *Math. Ann.*, 65 (1908), pp. 413-423.

[4] Marden, M., The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable. *Math. Surveys*, No. III, American Mathematical Society, 1949.

[5] Weiss, G. and Weiss M., On the Picard property of lacunary power series. *Studia Math.*, 22 (1962/63), pp. 221-245.

(Reçu le 30 août 1964.)

L. A. Rubel,
Dept. of Math.
University of Illinois
Urbana, Ill. 61803.

vide-leer-empty