Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1966)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OVALES ET OVOÏDES

Autor: Ehrhart, E.

Kapitel: IV. Théorèmes d'extrema

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40725

culièrement de l'intuition. On s'en rend compte en essayant de répondre aux questions suivantes, dont on lira plus loin les réponses.

Questions :

1) Quels sont les ovoïdes dont toute section plane a un centre de symétrie ?
2) Quels sont les ovoïdes dont tous les contours apparents sont plans ?
3) Quels sont les ovoïdes (solides homogènes) qui restent en équilibre sur un plan horizontal en toute position ?
4) L'ellipse est-elle le seul ovale ayant un cercle orthoptique ?
5) Existe-t-il des ovales non circulaires ayant un point intérieur tel que toutes les cordes qui y passent soient égales ?
6) Existe-t-il un ovale ayant deux tels points ?

Réponses :

1) et 2) l'ellipsoïde seulement;
3) la sphère seulement;
4) non;
5) oui, une infinité pour chaque longueur donnée de la corde;
6) non.

IV. Théorèmes d'extrema

Tout le monde sait qu'à volume donné l'ovoïde de surface minimum est la sphère; cela ne signifie pas que la démonstration en soit facile.

A volume donné, l'ovoïde de plus petit diamètre est la sphère.

A volume et à hauteur donnés, quel est l'ovoïde de révolution de surface maximum? C'est un cylindre, un cône ou un tronc de cône, suivant la valeur du rapport $\frac{h^3}{V}$.

A largeur donnée, l'ovale de plus petite surface est le triangle équilatéral.

Le plus petit disque qui peut couvrir tout ovale de diamètre D a pour rayon $R = \frac{D}{\sqrt{3}}$.

Tout ovale a-t-il un cercle circonscrit minimum et un cercle inscrit maximum uniques? — Oui pour le premier, non pour le second. (Pour le deuxième pensons à un rectangle.)

Soit un arc de courbe de longueur donnée, s'appuyant en ses extrémités sur les deux côtés d'un angle fixe. Steiner a démontré que l'aire limitée par l'angle et l'arc est maximum, si l'arc est circulaire et centré au sommet de l'angle.

Inutile de dire que de nombreux problèmes sur les ovales et les ovoïdes sont encore ouverts, telle la question de Henri Lebesgue: quel est l'ovale, d'aire minimum, pouvant couvrir tous les ovales de même diamètre donné ?

Quelques démonstrations typiques

S'il n'y a pas de principe général pour aborder les problèmes des corps convexes, il y a cependant quelques méthodes de démonstration auxquelles on recourt fréquemment.

Le polygone convexe.

Si une propriété est démontrée pour tout polygone convexe, elle est vraie pour l'ovale, que l'on peut considérer comme un tel polygone de côtés infiniment petits. Le cas extrême est alors souvent le triangle. C'est de cette manière qu'on peut, par exemple, démontrer le théorème des quatre cinquièmes. On peut aussi comparer un ovale à un polygone. Ainsi pour démontrer le théorème des points entiers, on remplace l'ovale par le polygone qui est l'enveloppe convexe de ses points entiers intérieurs ou périphériques. (La démonstration complète dans ([12]) prend moins d'une page.)

La fonction continue.

Soit, par exemple, à démontrer que tout ovale admet au moins un carré circonscrit, c'est-à-dire formé par des droites supports. Prenons dans le plan orienté de l'ovale un axe fixe $\vec{\Delta}$. A une