

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉVELOPPEMENT DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES
ET RÔLE DES PROBLÈMES DANS CE DÉVELOPPEMENT
Autor: Krygowska, A. Z.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40750>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DÉVELOPPEMENT DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES ET RÔLE DES PROBLÈMES DANS CE DÉVELOPPEMENT ¹⁾

par A. Z. KRYGOWSKA

1. INTRODUCTION

Les matériaux présentés par les sous-commissions nationales de la C.I.E.M. concernant la question du développement de l'activité mathématique de l'élève et le rôle des problèmes dans ce développement sont assez restreints. Neuf sous-commissions seulement ont envoyé leurs rapports, et il est très regrettable que certains pays, particulièrement engagés dans la réforme de l'enseignement des mathématiques n'aient pas participé à ce travail. De plus, la documentation élaborée par ces sous-commissions est très peu homogène en ce qui concerne tant le contenu que la forme. Par exemple, le rapport de la sous-commission de Grande-Bretagne est présenté sous forme d'une collection très abondante d'articles, de compte-rendus d'expériences particulières, de discussions, d'annonces de recherches en cours. Le rapport des Etats-Unis est composé de neuf articles, exprimant les opinions indépendantes de leurs auteurs. Le rapport allemand présente un article de synthèse et, en outre, une collection d'articles choisis de George Steiner et de Martin Wagenschein. Les autres sous-commissions nationales, au contraire, ont formulé des opinions unifiées, mais certains de ces rapports sont trop concis ou bornés à des remarques trop générales. Il est donc compréhensible qu'il m'était très difficile, sur la base de tels matériaux incohérents, très intéressants d'ailleurs, d'élaborer un compte-rendu synthétique, englobant tous les aspects de la question considérée, révélés dans les rapports.

J'ai décidé donc de concentrer mon rapport seulement sur quelques problèmes choisis, qui semblent être aujourd'hui les plus importants et les plus urgents.

¹⁾ Rapport général de la C.I.E.M. présenté au Congrès international des Mathématiciens à Moscou, août 1966.

2. POSITION CONTEMPORAINE SUR LA QUESTION

Les problèmes que nous allons discuter ne sont pas nouveaux. Une certaine forme d'enseignement actif a été propagée déjà par Socrate. Et depuis le commencement de notre siècle, tous les pédagogues et les réformateurs de l'enseignement des mathématiques, comme par exemple les créateurs du programme de Méran et les partisans fervents des conceptions pédagogiques de Félix Klein, ont souligné le rôle de l'activité mathématique personnelle et multilatérale de l'élève dans son initiation au monde des idées mathématiques. Le principe de « l'enseignement par solution de problèmes » est une conséquence si immédiate de la nature même des mathématiques, que George Polya exprime son étonnement qu'une vérité si évidente exige encore une discussion nouvelle.

Il écrit : « La solution des problèmes a été la charpente de l'enseignement des mathématiques depuis le temps du Papyrus Rhind. L'œuvre d'Euclide peut être considérée comme une contribution pédagogique consistant dans la dissection du grand sujet de la géométrie en des problèmes faciles à dominer. Le problème est, selon mon opinion, aujourd'hui aussi la charpente de l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire et je suis gêné d'être obligé de souligner et de motiver une chose si évidente. » [12, p. 5]

Les rapports norvégien, suédois et allemand constatent que « l'école active » (Arbeitschule) est devenue dans ces pays — il y a déjà bien des dizaines d'années — le principe fondamental de la pédagogie des mathématiques. Selon les rapports espagnol et suisse, l'enseignement des mathématiques dans ces pays est basé sur l'activité constructive de l'élève. Dans tous les pays d'ailleurs on utilise des procédés heuristiques d'initiation des élèves aux notions, aux théorèmes et aux méthodes mathématiques. Chaque cours contient une partie consacrée à la solution des problèmes, dans chaque manuel l'élève trouve des listes de questions, qui peuvent et doivent être les thèmes de sa recherche personnelle. On pourrait donc considérer la situation pédagogique concernant le développement de l'activité mathématique des élèves comme bonne presque partout. Une analyse plus profonde de la réalité scolaire dissipe néanmoins cette illusion.

Il y a beaucoup de raisons justifiant la mise à l'ordre du jour par la C.I.E.M. de la question envisagée. 1^o En réalité il existe *un grand abîme* entre le principe pédagogique de « l'école active » et la manière de son incorporation dans « l'enseignement des mathématiques pour tous », cet enseigne-

ment qui devrait nous intéresser particulièrement. L'activation des élèves très doués, groupés dans des classes sélectionnées ne pose pas de problèmes difficiles. Ici la rencontre de l'intelligence ouverte à la recherche avec la nature même de la science si stimulante, crée une situation favorable à « l'enseignement par les problèmes ». Mais ce qui est plus difficile et plus important, c'est de trouver les procédés favorables à l'activation mathématique de la majorité des élèves moyens ou plus faibles, étudiant dans des conditions ordinaires, souvent même dans des écoles très modestes. L'analyse objective des obstacles et des facteurs positifs pourrait être très utile.

2° *Les conceptions de « l'enseignement par les problèmes » sont très différenciées.* Une certaine entente donc, même approximative, concernant les termes tels que « activité mathématique », « mathématiques propres de l'élève », etc, est évidemment nécessaire.

3° *La modernisation des programmes, du langage, de l'esprit même des mathématiques élémentaires pose des questions nouvelles exigeant des recherches et des solutions rapides.* La réforme a fait des progrès plutôt en ce qui concerne la construction théorique d'un édifice cohérent et solide des mathématiques scolaires modernisées qu'en ce qui concerne les méthodes de la réalisation concrète en classe des idées nouvelles. C'est compréhensible d'ailleurs, pour beaucoup de raisons, mais c'est aussi la cause de beaucoup de malentendus, car ce décalage a été et est encore aujourd'hui une source de la méfiance de principe, exprimée par certains pédagogues et mathématiciens éminents relativement à la possibilité et à la nécessité de l'introduction des mathématiques, dites modernes, dans l'enseignement scolaire. Une imagination pédagogique particulière est indispensable pour être convaincu à priori que l'esprit moderne des structures mathématiques abstraites peut être harmonisé avec la voie génétique dans l'enseignement. On a déjà beaucoup fait dans ce domaine; il suffit de mentionner comme exemple les travaux exécutés et développés continuellement en Belgique, mais il y a encore beaucoup à faire. Les mathématiques élémentaires traditionnelles disposent d'une réserve très riche de problèmes de différents degrés de difficulté, réserve qui est le résultat des travaux scientifiques et pédagogiques de plusieurs dizaines de siècles. Ces problèmes ont été bien adaptés au programme et à l'esprit des mathématiques de l'école traditionnelle. Le banissement de la géométrie classique d'Euclide de l'enseignement scolaire élimine en même temps la plupart de ces problèmes, critiqués énergiquement d'ailleurs par certains réformateurs des mathématiques élémen-

taires, mais aussi hautement appréciés par d'autres mathématiciens contemporains qui y voient une bonne école de la pensée mathématique avec ses aspects intuitifs et logiques. Le vide ainsi créé par la révolution d'aujourd'hui doit être remplacé par un système de base de problèmes nouveaux, de différents degrés de difficulté, accessibles à l'élève moyen, ouverts à sa recherche personnelle et harmonisés avec le contenu et l'esprit des programmes modernes. La notion même du « bon problème », bon aussi bien au point de vue scientifique et méthodologique qu'au point de vue pédagogique, mérite d'être éclaircie. Toutes ces questions devraient être discutées largement et concrètement.

4° *Des questions analogues surgissent en rapport avec la construction axiomatique du cours moderne ;* il est compréhensible que cette construction a priori ne s'accorde pas par elle-même avec la recherche tout à fait libre de l'élève, recherche basée sur les procédés génétiques et intuitifs dans le sens pastulé, par exemple par M. Wagenschein dans le rapport allemand ou par certains auteurs participant au rapport anglais. Il y a ici un grand problème pédagogique et méthodologique qu'on ne doit pas passer sous silence.

5° *Les applications modernes des mathématiques ont dépassé les limites définies par les objets classiques de cette discipline :* nombre et forme géométrique. La question se pose — comment et dans quelle mesure pourrait-on et devrait-on inclure dans les travaux mathématiques personnels des élèves les exemples sérieux et instructifs des applications du genre nouveau, quelles applications seraient ici les plus éducatives et les plus utiles.

6° La dernière question, enfin, concerne *la préparation des professeurs à « l'enseignement des mathématiques par les problèmes »*. C'est une question particulièrement urgente au moment de la modernisation révolutionnaire du contenu et de la construction des mathématiques élémentaires.

Dans la suite, je voudrais concentrer mon rapport sur les trois questions suivantes :

1. Conceptions différentes de l'activation mathématique des élèves ;
2. Facteurs favorables et facteurs défavorables au développement de l'activité mathématique des élèves ;
3. Problèmes dans le contexte moderne des programmes de mathématiques.

3. CONCEPTIONS DE L'ACTIVATION MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES

Les interprétations de « l'enseignement actif des mathématiques » sont très différenciées et l'analyse des rapports présentés par les sous-commissions nationales de la CIEM révèle que les mêmes termes ont souvent une signification différente. Les différences concernent avant tout *la relation de deux facteurs fondamentaux intervenant dans chaque enseignement : la transmission aux jeunes des connaissances, des expériences et des méthodes de la pensée élaborées par les adultes d'un côté et la découverte libre et la création libre faites par les élèves mêmes*. La clef de voûte de la conception pédagogique réside dans la réponse à la question : ces deux facteurs sont-ils essentiellement opposés ou, au contraire, sont-ils essentiellement liés en un seul processus ?

Les opinions les plus extrêmes dans ce domaine sont présentées par certains fragments du rapport anglais [15], concentré d'ailleurs avant tout sur le développement de l'activité mathématique des élèves les plus jeunes.

Le rapport anglais souligne fortement les divergences qui opposent la pensée des adultes à la pensée des élèves, en constatant expressément : « Chaque adulte a ses habitudes dans les domaines de la pensée et de l'action qui sont devenues sa seconde nature. Il lui est très difficile d'avoir la conscience de cette longue voie qu'il a traversée dès sa naissance... Le professeur de mathématiques passe par l'étude conventionnelle et formelle des mathématiques. Il a tendance à penser que ses propres méthodes, son niveau, ses idées sont aussi appropriés à ses élèves. Beaucoup d'enfants n'acceptent pas les schémas de ce type, ce qui conduit aux insuccès, à la prostration, au désespoir. Et la conséquence, c'est le rejet complet des mathématiques » (voir [15, p. 20, 21]).

L'auteur cite un exemple de la manière de penser d'un enfant, typiquement étrangère à la pensée des adultes. Un garçon constate l'identité de l'aire de tous les parallélogrammes ayant des côtés de la même longueur, et « démontre » sa thèse en inclinant une fenêtre autour de son côté horizontal. La fenêtre-rectangle se transforme dans la perspective dans une fenêtre-parallélogramme ; selon l'opinion du garçon, les côtés et l'aire restent invariables. L'auteur écrit : « Dans de pareilles situations, il est très rare que l'adulte pénètre à l'aide d'une recherche spécifique dans la manière de penser de l'enfant (et très rarement on donne à l'enfant l'occasion et on l'encourage à exprimer et à expliquer son point de vue) » [15, p. 22].

« Le point de vue de l'enfant est immédiatement rejeté par l'adulte pour deux raisons: *a*) l'enfant donne une réponse fautive; *b*) son point de vue ne s'accorde pas avec le point de vue de l'adulte » [15, p. 22]. L'auteur met en doute le droit des adultes à une telle attitude, en citant des thèses aujourd'hui évidemment fausses, qui ont été reconnues comme vérités absolues par les adultes des siècles antérieurs. En conséquence, il formule le postulat suivant: « L'essentiel dans l'initiation aux mathématiques créatrices, c'est d'assurer aux enfants leur développement naturel. Il ne faut pas que les enfants acceptent la conception imposée par le monde adulte, qui leur est étrangère (peut-être inaccessible à leur âge et à leurs aptitudes) » [15, p. 22].

Une condition *sine qua non* de la mise en œuvre de ce postulat dans la réalité scolaire est la connaissance de la pensée de l'élève à chaque étape de son développement. Cette connaissance ne peut être acquise — selon le rapport — que par l'observation continue et objective des réactions spontanées des élèves devant les problèmes, ce qui exige aussi la non-intervention du maître dans l'activité des enfants.

Certains fragments du dossier anglais sont consacrés à la notion même de l'activité mathématique de l'enfant et de l'élève, cette activité — selon l'opinion des auteurs — ne devant pas être à priori définie et limitée par les mathématiques des adultes. L'enfant veut et peut créer sa propre mathématique. La tâche du maître n'est que d'assurer une situation initiale, provoquant et délivrant l'activité de l'enfant, activité qui se développe dans la suite indépendamment, sans intervention directe de l'enseignant. Les auteurs pensent à une véritable création en constatant: « En vue de développer les sources les plus larges de l'intelligence humaine, il serait plus important de penser à la création des mathématiques qu'à leur découverte » [15, p. 18]. On pose la question: « Raconterons-nous donc à nos élèves les mathématiques et leur donnerons-nous des occasions d'activité mathématique répétée au cours du travail direct sur des exemples soigneusement choisis? Il serait injuste de considérer qu'il n'y a pas d'activité mathématique dans ce procédé... Mais il est vrai que l'expérience créatrice ne serait pas mise ainsi en évidence [15, p. 173]. On pose aussi l'accent plutôt sur le processus de la création que sur son effet. On écrit: « La valeur consiste dans l'activité créatrice et non dans ce qu'on a créé ». Et cela, malgré que l'auteur lui-même pose la question « dans quelles limites ce serait justifié » ? [15, p. 24]. L'esprit général de certains fragments du rapport suggère que ces limites devraient être assez vagues et à priori largement ouvertes.

L'activité mathématique primaire de l'enfant — selon l'opinion présentée dans le rapport anglais — n'est que la prise de conscience de « la même chose » dans des situations différentes, cette « même chose » dépendant du point de vue admis ¹⁾).

L'enseignement au niveau inférieur devrait avoir le caractère de « incidental learning » [15, p. 51], dépendant de l'atmosphère du groupe, dans les situations naturelles, provoquant les activités spontanées de l'enfant. A ce niveau les problèmes doivent être résolus par les enfants apparemment sans effort, presque immédiatement. La gradation des difficultés et l'organisation progressive de ces recherches libres dans un système cohérent de la science, avec conservation du principe de « l'activité libre » et des « mathématiques propres » de l'élève, semble être le problème crucial de cette pédagogie originale, développée dans le rapport d'une manière très intéressante, et éclairée de points de vue individuels de nombreux auteurs. Le lecteur du rapport s'égaré souvent dans la richesse des idées très instructives mais seulement esquissées. Ce qui lui manque, c'est la mise en évidence que cette suite d'activités créatrices de l'élève, délivrées seulement avec l'intervention minimale du maître, peuvent aboutir finalement à la solution du problème cité dans le rapport: « Démontrez la convergence ou divergence des séries: $\left\langle \sum \frac{1}{r}, \sum \frac{1}{2r} \right\rangle$ » Le problème de ce passage — comme je l'ai dit, crucial pour cette pédagogie — semble être encore ouvert.

La conception de Martin Wagenschein [4] présentée dans le rapport allemand demande apparemment la même chose, c'est-à-dire la non-intervention possible du maître dans la recherche mathématique de l'élève. Mais l'analyse du compte-rendu des leçons décrites dans cet article révèle le contraire. Ce qui est important — selon cette conception — c'est le genre, le caractère de cette intervention.

L'auteur caractérise les étapes de cette intervention de la manière suivante:

1. La première tâche du maître, c'est le choix d'un problème, qui ne soit ni trop facile ni trop difficile, c'est-à-dire qui n'exige pas de connaissances trop larges d'une part, mais qui ne peut être résolu sans un effort intense de la

¹⁾ Evidemment les auteurs ont raison de dire que cette prise de conscience est le premier pas et le plus important dans la direction du monde abstrait des structures. Mais ce procédé n'est pas spécifiquement mathématique. La classification opérative des situations d'un point de vue imposé par le besoin matériel ou intellectuel particulier, c'est la genèse de la pensée abstraite en général: l'identification de ce processus avec la pensée mathématique efface les frontières délimitant les mathématiques des autres sciences.

pensée de l'élève. Ce qui est aussi important, c'est que les élèves aient la possibilité de résoudre le problème, en groupe, sans le dictat du maître.

2. Le maître assure les moyens nécessaires à la résolution du problème.

3. Le maître aide essentiellement la compréhension de la question par tous les élèves. Souvent il doit, à cette étape, beaucoup expliquer, beaucoup parler; mais le moment viendra, ou il commence, en principe, à se taire.

4. Néanmoins, dans la suite aussi son intervention sera nécessaire de temps en temps. Mais cette intervention ne consiste pas dans le fait qu'il précède le groupe des élèves; au contraire, il provoque des moments de réflexion, de synthèse, d'arrêt dans la croissance de la tension, pour préciser la situation: où sommes-nous? qu'est-ce que nous voulons?

La conception de Wagenschein oppose à l'éducation mathématique « encyclopédique » l'enseignement défini comme « Exemplarisches Lernen der Mathematik » c'est-à-dire l'enseignement basé sur l'étude multilatérale faite par les élèves avec la collaboration du maître — décrite ci-dessus — des problèmes peu nombreux mais méthodologiquement bien choisis. Au cours de cette étude les élèves doivent passer — selon l'auteur — par les étapes différentes d'une véritable recherche scientifique. L'accent est mis sur la prise de conscience par les élèves mêmes de la voie intellectuelle qui les a conduit à la solution. L'accent est mis aussi sur le travail en groupe, sur la discussion, sur la confrontation des résultats des travaux individuels.

« Exemplarisches Lernen » s'oppose aussi à la conception des mathématiques élémentaires conçues comme un édifice logiquement cohérent construit à priori sans lacunes. La synthèse des fragments étudiés profondément par les élèves devrait se réaliser — selon cette conception — plutôt à la base des méthodes de la pensée mathématique concentrée sur les questions locales, que sur la construction totale des matières.

Malheureusement cette conception pédagogique, évidemment originale, n'est illustrée que par des exemples trop traditionnels non seulement dans leur contenu mais aussi dans leur esprit. En discutant cette conception il nous faut discerner et isoler ces deux aspects.

Le rapport anglais ainsi que l'article de Wagenschein mettent l'accent sur le réveil de l'intérêt des élèves pour la recherche mathématique. Les auteurs anglais opposent au « désespoir en mathématiques » provoqué par le dictat de la pensée adulte, la joie trouvée par l'élève dans la création mathématique et les différents aspects affectifs positifs de la méthode active. On ressent même une obsession de la crainte du découragement de l'élève et

de son ennui; les mathématiques devraient se présenter dans cette conception aux jeunes adeptes comme un jeu intellectuel excitant et agréable.

Wagenschein au contraire ne cache pas les aspects durs de l'activité mathématique, caractérisé par la tension intellectuelle particulière, par un effort souvent très difficile, par la patience au cours des insuccès, par la compréhension de la nécessité des travaux auxiliaires souvent ennuyeux et rudes, etc.

La question se pose: est-il nécessaire et est-il possible à tous les enfants de trouver de la satisfaction au niveau de cette tension intellectuelle? D'autre part est-il possible d'enseigner aux enfants les mathématiques comme un jeu, toujours excitant, toujours agréable?

Nous trouvons presque dans chaque classe des élèves, qui ont le goût pour l'étude approfondie. Mais il y en a d'autres souvent ingénieux, mais souvent aussi intellectuellement légers, peu habiles dans les techniques mathématiques, qui s'intéressent uniquement aux thèmes nouveaux, saisis seulement superficiellement. Il y en a d'autres qui, au contraire, aiment répéter les mêmes exercices, résoudre des problèmes du même type, appliquer les mêmes schémas et les mêmes algorithmes, et qui exécutent ces travaux avec un intérêt, avec une passion, souvent incompréhensible pour le professeur. La maîtrise d'un instrument de pensée bien saisi, la possibilité de l'utiliser et de démontrer cette maîtrise non seulement aux autres mais à soi-même avant tout, peuvent être et sont, en réalité, pour beaucoup d'élèves la source d'une satisfaction et d'une joie profonde. Evidemment c'est une « activité passive » du point de vue de la pensée créatrice du mathématicien. Mais il n'est pas vrai que l'activité de ce genre apporte aux élèves seulement l'ennui et la haine des mathématiques.

Les mathématiques sont souvent rejetées par certains élèves, non à cause de l'ennui, mais à cause de cet effort intellectuel particulier, sans lequel une vraie activité mathématique n'existe même pas au niveau inférieur. Ce sont des faits qui ne doivent pas être passés sous silence dans notre étude.

L'activité mathématique de l'élève — aussi bien selon le rapport anglais que selon la conception de Wagenschein — devrait s'exprimer aussi dans sa réflexion à posteriori concernant le problème déjà résolu: jeter le regard en arrière, analyser les causes du succès ou de l'insuccès, comparer les résultats, revenir au même problème en vue d'améliorer la méthode de la solution, « prolonger » le problème dans un autre, « généraliser », „ spécifier ”, etc.

Evidemment l'enfant et l'élève le plus jeune sont souvent inaptes à la révision et à la systématisation à posteriori de leurs activités mathématiques,

qui sont encore trop spontanées. L'attention de l'enfant est concentrée sur chaque manipulation, réelle ou pensée, séparément et sur l'effet de son travail. Mais à un moment approprié, on devrait commencer à organiser des situations favorables à cette réflexion à posteriori. En élaborant un schéma compte-rendu des opérations exécutées, l'élève découvre de même le schéma-type des opérations, applicables aux situations analogues, et prend la conscience d'une stratégie effective, ou au contraire d'un procédé qu'on doit éviter. Nos observations prouvent qu'une des raisons des échecs des élèves moyens, malgré leur travail et leur bonne volonté, est justement le manque, souvent complet, des situations de ce genre organisées consciemment en classe par le maître, dans lesquelles on analyse la voie déjà parcourue du point de vue de la méthode et de la stratégie, et où l'on prend conscience des perspectives de nouveaux problèmes. Les remarques concernant cette question, dans chacun des deux travaux analysés jusqu'ici, sont de grande valeur pédagogique.

Je me suis arrêtée assez longuement à certains fragments du rapport anglais ainsi qu'à certaines idées de Martin Wagenschein, car j'y trouve deux conceptions originales, différentes évidemment, mais au même degré radicales, en comparaison des autres conceptions de l'activité mathématique de l'élève présentées dans la majorité des rapports, même dans les autres fragments du rapport anglais et dans le rapport synthétique allemand.

D'après ces conceptions les plus répandues, les mathématiques élémentaires sont conçues comme un système cohérent, construit selon certains critères scientifiques, pratiques et éducatifs, à la base des mathématiques d'aujourd'hui, et dont l'échafaudage est exprimé dans le programme scolaire. L'activité mathématique de l'élève serait — selon cette conception — définie à priori par ce fait historique et social: la mathématique a son étape contemporaine, science caractérisée par son contenu, par ses problèmes, par son langage, par ses méthodes de recherche, par ses relations avec les autres sciences et par le type de son rapport avec le réel.

George Polya écrit [12, p. 3]: « L'enseignement doit englober tous les aspects principaux de la pensée du mathématicien, dans la mesure accessible à l'école secondaire ». Florence Jacobson [8, p. 1] constate: « Ceux qui critiquent les programmes modernes visent comme but de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire le « savoir-faire ». On postule que l'enseignement de la solution des problèmes développe ce « savoir-faire ». Mais, pour pouvoir résoudre les problèmes, l'élève doit apprendre les mathématiques ».

De quoi s'agit-il, de quelles mathématiques et de quelle « pensée du mathématicien »? Evidemment telles que nous les connaissons aujourd'hui; une des tâches de l'enseignement, c'est justement l'initiation de l'élève à certaines connaissances et à certains procédés de la pensée, définis par l'étape actuelle du développement historique des mathématiques et par les expériences intellectuelles des mathématiciens.

La transmission des expériences intellectuelles de génération en génération est évidemment la condition *sine qua non* du progrès culturel de l'humanité.

Mais transmettre et imposer ce sont des procédés extrêmement différents. La condition de cette transmission activant la pensée de l'élève, c'est la collaboration du maître et des élèves, aussi bien dans le développement de la théorie que dans son apprentissage. Le professeur prévoit une suite de problèmes par lesquels le sujet du programme est élaboré en classe, et éventuellement complété par le travail individuel à domicile. Ce projet préliminaire du maître devrait être très élastique suivant les réactions des élèves, donc susceptible de changements, mais aussi assez solide quant aux buts qui, selon le programme, devraient être atteints. La collaboration du maître et des élèves peut s'exprimer, en dehors des méthodes utilisées habituellement, par des exposés faits par des élèves et basés sur une lecture mathématique, par des lectures en groupe d'un texte mathématique, son analyse, son complément et développement actif, par l'exploration individuelle ou en groupe d'une situation — source des problèmes mathématiques, etc.

Je voudrais ajouter ici quelques remarques reflétant les questions discutées en Pologne, dont l'analyse nous a conduit à des conclusions souvent opposées à celles qui ont été exprimées dans certains autres rapports. Nous observons que beaucoup de nos étudiants moyens, pendant la première année de leurs études supérieures en mathématiques se heurtent à de grandes difficultés, provoquées par le changement brusque des méthodes d'enseignement. Il leur est extrêmement difficile de suivre activement un exposé du professeur, de prendre des notes, de comprendre le sens du texte verbal ou symbolique d'un livre ou d'une revue mathématiques. A l'école primaire et à l'école secondaire ils ont été habitués à des procédés demi-génétiques: par exemple les définitions ont été formulées le plus souvent après les observations et les expériences particulières, et de cette manière, la définition n'était qu'un compte-rendu verbal des notions précédemment saisies d'une manière intuitive. Quand il faut exécuter le travail inverse,

par exemple débrouiller les opérations nécessaires à la construction mentale d'un objet abstrait à partir d'une définition mathématique donnée à priori, beaucoup d'étudiants-débutants restent perplexes, ou se contentent d'une prise de conscience très superficielle qui, dans la suite de leurs études, s'avère comme incompréhension de la notion en jeu.

Nous savons tous que la lecture effective du texte mathématique exige un travail spécial, partiellement créateur, une étude basée sur la collaboration profonde avec l'auteur. Le texte n'est qu'échafaudage de ce travail. Le lecteur se rappelle les images et les intuitions sous-jacentes, dont les traces même ont été éliminées par l'auteur dans la rédaction verbale ou symbolique de ses idées. Il cherche des exemples et des contre-exemples, il complète les lacunes dans les raisonnements seulement esquissés par l'auteur. Souvent au contraire, une chaîne d'implications très détaillées, bien comprises, n'est pas saisie dans son ensemble. On cherche donc des idées directrices, on ressent le besoin d'un compte-rendu synthétique, etc.

Il n'est pas nécessaire de décrire ici ces expériences, bien connues de chacun qui a étudié les mathématiques. Mais il ne faut pas passer sous silence nos propres expériences quand nous discutons sur le développement de l'activité mathématique des élèves. Nos recherches et nos sondages dans les écoles secondaires révèlent des difficultés frappantes dans ce domaine (même s'il s'agit de la lecture du manuel mathématique scolaire), mais d'autre part prouvent que le travail des élèves sur le canevas du texte mathématique peut être organisé consciemment et méthodiquement comme recherche particulièrement instructive. Dans le rapport suédois [18] on constate: « Il est vraiment difficile pour les élèves d'apprendre les mathématiques à partir d'un manuel ». Le rapport norvégien [17] demande expressément: « Les manuels doivent être plutôt placés à l'ombre ». Nous apercevons ici au contraire un problème sérieux de la pédagogie des mathématiques qui ne devrait pas être à priori éludé, mais qui exige une solution raisonnable. Des recherches dans ce domaine se trouvent en cours par exemple en Pologne.

Evidemment, le « piochage verbal » du manuel devrait être absolument éliminé, mais il faut introduire l'élève consciemment dans la technique de l'utilisation active du livre mathématique, cette source principale d'information scientifique depuis l'invention de Gutenberg.

Dans le rapport anglais, M. Skemp écrit: « En général, le nouveau concept ne peut pas être transmis par une définition [15, p. 200]. Evidemment cela est vrai dans ce sens que cette transmission n'est pas directe,

qu'elle exige un travail actif de la pensée de celui qui essaie de saisir une notion à la base de la définition verbale. Et cette activité devrait justement être développée au même degré que l'activité inverse de définir précisément une notion élaborée par le processus de l'abstraction. Nos recherches en Pologne prouvent par exemple que la première réaction des élèves à l'âge de 14-15 ans à une définition verbale s'exprime souvent dans l'essai de saisir le sens immédiatement, sans effort intellectuel, sans analyse, et seulement par une « lecture contemplative » répétée plusieurs fois de la même manière. L'élève semble attendre une inspiration rapide, il ne sait pas ce qu'il lui faut faire pour comprendre. Découragé, il constate souvent : « Je ne comprends rien, c'est tout à fait embrouillé ». La lecture commune en classe, la transformation du texte dans la description d'une suite d'opérations conduisant à la construction d'un modèle de la structure définie, faite par les élèves mêmes avec l'aide patiente du maître, aide limitée à la méthode et à la technique de ce travail, change l'attitude passive du jeune lecteur. Le caractère opérationnel des mathématiques facilite ce passage de la contemplation passive et improductive du texte au travail conscient. L'élève s'étonne : « Je ne comprends pas pourquoi je n'ai pas compris ». Il apprend pas à pas, au cours d'expériences particulières, répétées de temps en temps dans des situations diverses, comment il lui faut attaquer le texte mathématique. Les travaux de ce type, inclus consciemment dans les autres activités, sont très instructifs. Par exemple les élèves ont trouvé une démonstration différente de celle qui a été donnée par l'auteur du manuel. On analyse le texte, on compare, on apprécie. Nous constatons que les exigences de l'élève concernant la précision surgissent au fur et à mesure de cet apprentissage.

Il commence à être conscient des faux pas, des lacunes de son manuel. Il devient pas à pas l'utilisateur critique de l'information mathématique ; il devient aussi plus précis dans son expression verbale et symbolique, dans la transmission de ses idées. L'opposition antérieure, si pénible souvent, entre son langage naturel et son langage scientifique disparaît ; ce langage scientifique élaboré et amélioré au cours des siècles par les adultes s'avère très commode, au lieu d'être « la camisole de force » imposée par la pédanterie bizarre du maître.

L'élimination complète des études basées sur l'exposé du maître ou sur la lecture du manuel mathématique, en tant que procédés dits « réceptifs » en opposition aux autres, dits « actifs », conduit — selon les expériences polonaises — à l'appauvrissement des genres d'activité de l'élève. C'est pourquoi l'instruction associée au nouveau programme de mathématiques

en Pologne accentue la nécessité de l'utilisation de méthodes diverses en vue de développer les mécanismes les plus divers de la pensée. L'enseignement des mathématiques pour tous les enfants, ainsi conçu, dépasse les buts de l'éducation mathématique même et devient un facteur essentiellement important de l'éducation générale.

Nous avons jusqu'à présent analysé le concept de l'activité mathématique de l'élève dans la lumière de la relation: transmission-découverte. Dans certains rapports on fait cette analyse à partir d'autres points de vue. Dans le rapport anglais, par exemple, G. Gilles discerne les activités mathématiques de trois types: création, intégration et consolidation, en demandant leur équilibre dans l'organisation pédagogique des activités des élèves. Dans le même rapport R. Skemp traite la question du point de vue de deux catégories psychologiques: l'assimilation d'un problème au schéma connu et l'adaptation créatrice du schéma à la situation nouvelle, qui ne peut pas être assimilée aux schémas connus. Le rapport allemand présente en détail, dans l'article de Hermann Athen [1], l'exemple de la programmation des étapes consécutives des activités mathématiques des élèves basée sur le contenu du « programme de Nuremberg ». L'activité des enfants au cours des quatre premières années de l'enseignement est dirigée vers les opérations fondamentales de la pensée dans le sens de la psychologie de l'intelligence de Piaget et organisée selon les idées de l'enseignement opératif de Aebli et de Fricke avec l'utilisation multilatérale des matériaux structurés. L'étape suivante (5^e, 6^e et 7^e année d'enseignement) malgré son caractère inductif et malgré ses buts pragmatiques (calcul, faits géométriques) prépare les idées fondamentales de la méthode mathématique même au cours des exercices numériques. L'expérience géométrique est basée sur les modèles et sur les constructions classiques, avec la mise en relief des transformations et de l'interprétation ensembliste des faits géométriques. Le principe de « Exemplarisches Lernen » de Wagenschein — selon le rapport — peut et doit trouver à cette étape sa réalisation adéquate.

L'étape suivante (8^e, 9^e et 10^e année d'enseignement) peut être caractérisée comme étape du complément systématique et de la mise en évidence des structures mathématiques sous-jacentes aux matières déjà partiellement connues et maintenant développées dans un esprit nouveau. On passe graduellement de l'organisation locale déductive, caractéristique pour l'étape précédente, à l'organisation plus globale. La dernière étape enfin (11^e, 12^e et 13^e année d'enseignement) concentre l'activité des élèves sur l'approfondissement méthodologique et sur les applications des mathématiques.

Comme nous voyons, l'expression « l'activité mathématique de l'élève » peut être et est en réalité interprétée différemment dans un sens plus ou moins large ou plus ou moins vague. Elle peut être aussi analysée de points de vue très divers. L'essentiel reste néanmoins commun: la conviction exprimée dans tous les rapports que la tâche la plus importante de la pédagogie des mathématiques d'aujourd'hui c'est la concentration du processus de l'enseignement sur la participation consciente et créatrice de l'élève dans le sens le plus concret et le plus honnêtement interprété de ce terme, ce qui implique de même le développement continu et effectif de son activité mathématique multilatérale.

3. CONDITIONS FAVORABLES OU DÉFAVORABLES AU DÉVELOPPEMENT DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DE L'ÉLÈVE

Des réponses directes et plus détaillées à ces questions ont été données seulement par deux sous-commissions. Certaines remarques disséminées dans d'autres rapports ne complètent ces réponses que partiellement.

La première question concerne l'influence du contenu et de la construction du programme sur le développement de l'activité mathématique de l'élève.

En formulant ce problème dans mon questionnaire j'attendais une confrontation objective et concrète — faite de ce point de vue — des programmes modernes avec les programmes traditionnels. Malheureusement, cette question a été, dans la majorité des rapports, passée presque sous silence ou traitée très superficiellement.

Le rapport hongrois [16] constate que le contenu du programme n'a pas d'influence décisive sur le développement de l'activité mathématique des élèves. Ce qui est avant tout important — selon ce rapport — c'est la méthode. Le contenu traditionnel peut être et a été élaboré en classe d'une manière dogmatique ainsi que par des procédés activant la pensée mathématique des élèves.

Beaucoup d'exemples cités dans les rapports en tant qu'illustration des problèmes particulièrement favorables au développement de l'activité mathématique de l'élève, concernent justement des questions tout à fait traditionnelles.

D'autre part, les expériences récentes prouvent que, dans le programme moderne, le professeur trouve une base extrêmement riche pour l'activité

créatrice de l'enfant; néanmoins, il arrive encore souvent que ce programme est traité en classe d'une manière dogmatique, autoritaire, formelle.

Dans le dossier présenté par les sous-commissions de la CIEM nous trouvons une seule position concrètement documentée qui montre des perspectives ouvertes à l'activation de la pensée mathématique de l'élève par le contenu nouveau des programmes. Je pense aux compte-rendus détaillés des cycles de leçons de George Steiner [2, 3], basées sur des recherches mathématiques véritables faites par les élèves en classe, concernant des domaines d'idées mathématiques très abstraites, développées dans un esprit tout à fait moderne, et néanmoins procédant par des voies génétiques et inductives.

Ces perspectives sont soulignées fortement dans certains rapports. On met en évidence presque partout le rôle particulier de la vision et du langage ensemblistes, qui facilitent l'accès actif des élèves, même des plus jeunes, aux idées abstraites modernes. Mais, de l'autre côté, on exprime la crainte par exemple dans l'article de N. Fine de la sous-commission des Etats-Unis [7] que cette source riche en situations mathématiques potentiellement si intéressantes et instructives, ne se soit égarée trop facilement par des problèmes stériles, inutiles, banals.

Selon l'opinion de George Polya [12] c'est justement cette situation négative qu'on constate dans beaucoup de manuels dits modernes. Les manuels traditionnels étaient « surpeuplés » par les problèmes d'un seul schéma, c'est-à-dire par des problèmes dont la solution n'exigeait que l'application d'un seul schéma bien connu. Les manuels modernes — selon l'opinion de George Polya — se limitent aussi aux problèmes de routine mais d'un autre type, à savoir aux problèmes de terminologie. Les problèmes d'un seul schéma ainsi que les problèmes de terminologie peuvent être utiles et même nécessaires en ce qui concerne l'habileté et la connaissance mécanique, mais leur contribution ou développement de l'activité mathématique des élèves est minime. Beaucoup de notions modernes abstraites ne sont pour les élèves que des symboles et des termes, car elles ne sont pas assez profondément et largement enracinées dans leurs expériences personnelles et dans leurs intuitions. C'est pourquoi l'élève ne peut pas les appliquer dans des problèmes véritables. En conséquence, il est exercé dans la solution des problèmes plats de routine, dont la majorité concerne l'utilisation correcte du langage et qui ne méritent même pas d'être considérés comme problèmes mathématiques.

De ce point de vue on défend aussi dans certains rapports (anglais, américain) la géométrie comme un domaine très favorable à l'activité

multilatérale des élèves, orientée par ses expériences spatiales, donc pénétrée par des intuitions, et en même temps ordonnée par des rigueurs logiques. On souligne que les problèmes géométriques, même surannés ont un caractère spécifique, grâce évidemment à cette synthèse de l'intuition naturelle, de l'expérience spontanée, de la vision et du raisonnement. La géométrie peut être le domaine des essais de l'élève de différents types et à des niveaux divers. Ces recherches dans le monde géométrique peuvent être aussi naïves que raffinées, aussi concrètes, liées aux manipulations, que formelles. On peut donc se mouvoir librement à tout âge dans ce domaine, si facile à concrétiser par un modèle ou par un dessin.

La conscience de cette spécificité s'exprime par exemple dans le programme de Nuremberg qui conserve encore, dans l'enseignement des mathématiques au cours de la 5^e, 6^e et 7^e année de la scolarité, des constructions géométriques classiques, éliminées en tant que bizarreries dans beaucoup de programmes modernes. Evidemment, ce bannissement a été justifié avant tout du point de vue de la méthodologie de la science même. Les constructions classiques n'étaient, dans le système axiomatique d'Euclide, que des démonstrations de théorèmes d'existence. Elles perdent ce sens avec le changement d'axiomatique de la géométrie et même dans la théorie logiquement équivalente à la théorie d'Euclide des problèmes de construction-clefs pour Euclide peuvent devenir des problèmes marginaux, artificiellement construits, des bizarreries véritables.

Aux idées d'Euclide se réfère la motivation présentée dans le rapport allemand. On y écrit expressément: « les constructions géométriques des triangles dans le style ancien, donc l'apprentissage dégénéré à la solution mécanique de certains problèmes, paralysent l'intérêt et l'activité des élèves. Mais si les constructions de base sont liées conceptuellement aux théorèmes de base, alors les propriétés des figures se révèlent aux élèves comme des implications inévitables de la traduction dans le langage conceptuel des opérations manuelles, effectuées avec le compas, la règle, etc. Cette méthode est appropriée à la tendance des élèves à agir concrètement. Pour cette raison et dans ce sens le programme de Nuremberg conserve encore les constructions de triangles » [1, p. 4].

La valeur pédagogique de cette confrontation de l'attitude opérative de l'élève avec le caractère concrètement opératif de la construction géométrique se manifeste nettement au cours de l'initiation des élèves à la démonstration mathématique. Voici la situation observée dans une école polonaise. L'élève a trouvé une construction; il « raconte » son invention

dans la forme d'une ordonnance formée d'une suite d'opérations, qu'il suffit — selon son opinion — d'exécuter pour obtenir la figure en question. On pose la question: «Ton ordonnance sera-t-elle toujours et partout valable? Si quelqu'un voulait l'appliquer, peut-il être sûr qu'il obtiendra la figure cherchée?» La réaction de l'élève n'est justement qu'un essai de démonstration spontanée, précisée pas à pas sous la pression de la méfiance et des doutes exprimés par le professeur ou les condisciples. Le même élève ne comprend pas encore le sens de la démonstration d'un théorème géométrique, le plus souvent évident pour lui dans les premiers chapitres de la géométrie. Mais, démontrer que sa propre ordonnance est correcte et utile, c'est une autre situation, c'est compréhensible, c'est naturel, c'est une affaire personnelle.

La liaison profonde des opérations concrètes du dessin avec les idées abstraites, basée sur l'intériorisation des manipulations dans la pensée, est très importante pour la pédagogie des mathématiques, science au caractère particulièrement « opératif ».

Ce problème exige évidemment une recherche profonde et il n'est pas du tout négligé dans la réforme récente des mathématiques élémentaires. Il suffit de mentionner ici les travaux systématiques du Centre belge sur la méthode des schémas et des graphes, dont le rôle dans le développement de l'activité mathématique des élèves est particulièrement souligné dans les rapports allemand et suédois.

Le développement de l'activité mathématique des élèves qui suivent un programme obligatoire est évidemment conditionné par l'arrangement juste et psychologiquement correct des niveaux consécutifs concernant le type des activités mathématiques des élèves; cette idée est développée largement dans les rapports allemand et hongrois.

Sous cette condition, le contenu moderne du programme scolaire peut être une source beaucoup plus abondante d'activités mathématiques, que le contenu traditionnel; de plus, ces activités peuvent être beaucoup plus différenciées et d'autant plus intéressantes et excitantes pour les élèves. Ce sont des faits constatés objectivement dans divers pays, même dans ceux qui — comme par exemple la Pologne — réalisent la réforme basée sur la « petite modernisation », une modernisation partielle.

La surcharge du programme, ainsi que le minimalisme dans ce domaine peuvent entraver le développement de l'activité mathématique des élèves, comme le prouvent les expériences de certains pays (Pologne, Hongrie).

Dans le premier cas, le professeur, sous la pression de l'étendue des matières qui doivent être assimilées dans une durée définie, ne laisse pas aux

élèves de temps nécessaire à la réflexion indépendante. Le minimalisme conduit à l'inertie et à l'ennui. De l'autre côté, les méthodes actives s'avèrent finalement plus économiques, même du point de vue de l'étendue du contenu. Le temps consacré aux questions fondamentales, élaborées avec l'engagement personnel des élèves, n'est pas à fonds perdu; certaines connaissances sont souvent acquises presque gratuitement grâce à l'expérience mentale profonde déjà acquise par les élèves. Ce qui est mauvais, c'est le calcul mécanique des horaires et des pages du manuel, qui décide de la distribution du contenu dans le temps chez beaucoup de professeurs n'ayant pas une conception d'ensemble du développement de l'attitude active des élèves.

Nous avons touché maintenant à un point très important et très difficile: la préparation du maître à l'enseignement actif des mathématiques.

Dans le rapport de la sous-commission des Etats-Unis, George Polya [12] exprime l'opinion que la méthodologie de l'enseignement n'est pas une science et ne le deviendra pas dans un proche avenir, mais que l'enseignement est un art; on ne peut parler de la meilleure méthode d'enseigner, de même qu'on ne peut parler de la meilleure interprétation d'une sonate de Beethoven.

Il faut néanmoins faire face à la réalité. Parmi les professeurs, les mathématiciens de talent manquent de plus en plus, car le développement rapide des sciences techniques et le progrès social ouvrent des carrières plus attirantes et très différentes. Le même processus a augmenté le nombre des élèves qui fréquentent les écoles primaires et secondaires et a créé le besoin urgent d'un plus fort recrutement de maîtres. Dans cette situation on ne peut pas espérer que le corps enseignant soit composé d'artistes et de virtuoses, et que l'enseignement soit comparable à l'interprétation d'une sonate de Beethoven. Le maître d'aujourd'hui n'est le plus souvent qu'un artisan plus ou moins habile, plus ou moins honnête, plus ou moins ouvert aux idées nouvelles.

De l'autre côté, les tendances actuelles dans l'enseignement des mathématiques augmentent les exigences concernant les connaissances scientifiques, pédagogiques et psychologiques des maîtres et concernant leur talent et leur initiative créatrice.

La situation dans l'enseignement des mathématiques est donc aujourd'hui paradoxale. Dans la majorité des rapports on constate expressément que les méthodes actives n'ont pas pénétré dans l'enseignement des mathématiques, car elles sont trop difficiles et trop embarrassantes pour les pro-

fesseurs. Pour ma part, je voudrais attirer l'attention sur le danger de la dégénération nocive de ces idées provoquée par des maîtres qui ont fini des études supérieures, mais dont l'esprit mathématique est limité. D'un autre côté, de bons mathématiciens n'ont qu'une connaissance presque nulle de la psychologie de l'élève.

Dans ces conditions la préparation de professeurs pour l'enseignement actif devient une tâche particulièrement urgente pour les écoles supérieures et pour toutes les institutions qui s'occupent de l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.

Cette tâche urgente est mise en évidence dans tous les rapports, où l'on mentionne aussi différentes démarches déjà en cours, ou des projets à réaliser.

Il faut souligner le grand travail dans ce domaine, présenté par le rapport anglais, ainsi que des propositions intéressantes faites par N.J. Fine [7] concernant les séminaires organisés au sein des études supérieures mathématiques et consacrées à la méthodologie et à la stratégie de la solution des problèmes.

Je voudrais souligner pour ma part l'importance de l'initiation des futurs professeurs à la recherche méthodologique théorique et pratique organisée parallèlement à leurs études mathématiques. Ces travaux exécutés par exemple dans mon séminaire concernant l'enseignement actif des mathématiques ont été non seulement extrêmement utiles pour les étudiants eux-mêmes, mais ont apporté aussi certains résultats qui méritent d'être répandus et qui se trouvent maintenant en élaboration synthétique.

Malgré tous ces efforts, le problème de la préparation des maîtres à l'enseignement actif des mathématiques reste ouvert et exige une solution plus générale et plus rapide. Si cette tâche n'est pas réalisée sans tarder, nos grandes idées de réforme peuvent même, au contraire, provoquer une régression dans les mathématiques scolaires. Et les signes de ce danger sont déjà mentionnés dans certains rapports.

Parmi les facteurs entravant le développement de l'activité des élèves on met particulièrement en relief les méthodes d'évaluation du progrès des élèves et les examens.

Il est facile d'apprécier les connaissances et l'habileté des élèves, il est au contraire très difficile d'évaluer objectivement le niveau de leur activité mathématique.

C'est pourquoi l'élève obtient le plus souvent des notes adéquates à ses connaissances et à son habileté, ce qui influence sa manière d'apprendre et

fausse son opinion concernant ce qui est important en mathématiques. La situation empire si les prescriptions administratives dans ce domaine sont trop rigides. Comme le constate le rapport hongrois, il arrive dans certaines conditions que l'évaluation de l'élève et les notes deviennent le problème central de l'enseignement, que professeurs et élèves traitent le contenu du programme comme « matière à interrogation ».

Dans les autres rapports on souligne l'influence nocive des examens finaux et des examens d'entrée aux écoles supérieures. Les problèmes qui y sont posés sont souvent d'un type déterminé et — comme le constate par exemple le rapport suédois — beaucoup du temps précieux de l'enseignement est consacré à la solution de problèmes du même type, donc non à une éducation mathématique approfondie, mais bien à la préparation directe de l'élève à l'examen. Le rapport japonais [17] attire l'attention sur l'influence nocive des examens écrits basés sur des tests à choix multiple. Les élèves dont l'effort est dirigé avant tout à se bien préparer à ces examens ne sont pas aptes à formuler correctement une explication ou un raisonnement mathématique.

Je voudrais accentuer ici la responsabilité des écoles supérieures dans ce domaine. Le genre et l'esprit des problèmes posés au cours des examens d'entrée conditionnent à un degré considérable l'esprit de l'enseignement dans l'école secondaire. C'est le problème qui se trouve aussi au centre de la discussion en Pologne.

D'autre part, l'enseignement pseudo-actif des mathématiques basé sur un libéralisme exagéré et le contrôle trop superficiel des progrès des élèves, causé souvent par la crainte du schématisme, de l'ennui, du « piochage mécanique », court le danger contraire: connaissances superficielles, manque de l'habileté la plus élémentaire. On ne peut pas s'intéresser aux problèmes dans le vide mathématique. Nos observations prouvent, que le manque d'intérêt pour les mathématiques chez beaucoup d'élèves et leur attitude passive sont causées par des lacunes trop grandes dans leurs connaissances et dans leur habileté. Et en mathématiques, science si cohérente intérieurement, le manque d'une brique importante peut renverser toute la construction mentale.

Malheureusement, l'enseignement pseudo-actif et superficiel devient aujourd'hui assez fréquent. Il arrive que la leçon commence par un problème, mais les élèves sont conduits trop rapidement à la solution. Les questions et les remarques du professeur sont si suggestives, qu'on procède presque sans effort intellectuel. On pense « par fragments ». Si un élève se

heurte à une certaine difficulté, le suivant continue, si un élève a commis une faute, un autre le corrige et l'on avance vite, en glissant sur les questions plus profondes et plus fines. La leçon est agréable, la discussion vive. Tous sont contents. Le professeur, car il a fait une leçon brillante; les élèves, car tout a été si facile, si clair, qu'on n'a rien à apprendre et rien à exercer.

Et les résultats sont décevants. L'élève constate très vite avec étonnement un vide complet dans son esprit et dans sa mémoire. Il ne comprend déjà rien, il est découragé, il commence à haïr les mathématiques qui lui semblaient être si intéressantes auparavant.

Parmi les facteurs défavorables à l'enseignement actif liés à l'organisation scolaire, on souligne avant tout les classes surpeuplées. Selon le rapport allemand [1] l'effectif de la classe ne doit pas dépasser 20 élèves, si on veut réellement développer l'activité personnelle de l'élève. Evidemment, ce postulat est tout à fait irréal dans beaucoup de pays.

Le travail organisé en petits groupes s'avère être, selon des expériences nombreuses, très favorable au développement de l'activité mathématique des participants. On souligne aussi la grande valeur pédagogique résidant dans la variété de forme des travaux exécutés individuellement ou en groupes par les élèves, par exemple l'élaboration d'un thème plus large (« Jahresarbeiten » en Allemagne), les exposés des élèves en classe, présentant les résultats de leurs travaux ou le compte-rendu de leur lecture mathématique, les travaux organisés en corrélation avec les autres disciplines enseignées à l'école, etc. On met en évidence l'influence particulière des clubs mathématiques, des olympiades et des revues mathématiques, dont les lecteurs et les collaborateurs actifs sont les élèves eux-mêmes. L'organisation de l'activité des élèves est facilitée si l'école dispose d'un laboratoire bien équipé en livres et en matériaux concrets. Dans les pays où l'école secondaire de l'éducation générale est — comme par exemple en Pologne — unitaire, le rôle d'activer les élèves plus doués peut être accompli par les séminaires organisés dans le cadre de l'enseignement obligatoire en groupant les élèves selon leurs goûts et leurs intérêts personnels.

4. PROBLÈMES DANS LE CONTEXTE DES PROGRAMMES ACTUELS

Tous les auteurs des rapports constatent que la solution des problèmes est la forme la plus efficace non seulement du développement de l'activité mathématique des élèves, mais aussi de l'apprentissage des connaissances,

des habiletés, des méthodes et des applications mathématiques. De plus — l'attitude de l'élève devant les mathématiques est conditionnée avant tout — comme le constate dans le rapport américain N. Fine — par les types des problèmes mathématiques auxquels il fait face en classe et dans son travail personnel. C'est pourquoi la méthodologie de la solution des problèmes mathématiques dans l'enseignement primaire et secondaire se trouve au centre même de l'intérêt pédagogique.

Ces questions ont été traitées très largement, surtout dans les rapports américain et anglais. Il serait impossible même d'esquisser ici tous les problèmes considérés par les collaborateurs très nombreux de ces rapports. Je vais donc, dans la suite, signaler seulement les idées principales et particulièrement les questions encore ouvertes.

La grande partie des travaux présentés dans les rapports est consacrée à l'essai d'une analyse du problème mathématique vu dans l'aspect de l'enseignement, analyse relative à la définition, aux objectifs, à la classification, aux critères « d'un bon problème », aux stratégies de la solution du problème, etc. Mais tout cela n'est pas encore cristallisé.

Les différentes considérations concernant la définition du problème mathématique peuvent être finalement résumées dans l'explication donnée par Philip S. Jones [9] dans le rapport américain: le problème mathématique, c'est la question mathématique à laquelle la réponse n'est pas immédiate et ne peut pas être obtenue par l'application directe des schémas connus.

Deux sortes de problèmes sont à distinguer. Dans le premier cas, la question est formulée avec précision, dans le second, elle n'est pas encore cristallisée. Ce second type est la base, la source, le stimulant de la construction des problèmes mathématiques. H.O. Pollak [11] dans le rapport des Etats-Unis souligne avec force que c'est justement ce type de question qui est essentiel pour l'activité mathématique; les applications des mathématiques consistent au fond dans la formulation d'une question mathématique surgissant d'une situation qui se situe en dehors des mathématiques. L'auteur postule l'utilisation la plus large des problèmes à formuler dans l'enseignement. Au lieu d'encourager les élèves: « Voici un problème, cherchez la solution », « voici un théorème, cherchez la démonstration », il faudrait plutôt souvent leur dire: « Voici une situation, pensez à elle ».

Ce postulat est exprimé aussi dans le rapport anglais, où l'on développe largement les aspects éducatifs des questions et des problèmes posés par les élèves eux-mêmes.

En résumé, parmi les considérations, très incohérentes d'ailleurs, disséminées dans tous les rapports sur le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques, on peut discerner des remarques concernant :

1. L'organisation du processus de l'enseignement, et
2. Les aspects psychologiques de la participation active de l'élève dans ce processus.

Cette division n'a de sens particulier que dans l'analyse théorique, mais elle facilite la présentation claire de la question.

Le problème et la situation-source des problèmes interviennent dans le processus de l'enseignement des mathématiques à toutes ses étapes, à savoir :

1. Introduction de nouvelles matières (notions, théorèmes, méthodes, algorithmes, schémas); ici la solution des problèmes formulés à priori ou ceux qui se sont manifestés au cours de l'analyse d'une situation peut conduire à la découverte et à la création, ou à la compréhension du contenu transmis à l'aide de cette solution;

2. Apprentissage, consolidation, habiletés, mémorisation, synthèses, etc. ;

3. Contrôle de la compréhension ainsi que du degré de maîtrise des notions, des théorèmes, des méthodes; on peut discerner ici un auto-contrôle continu, où le rôle des problèmes est particulièrement important, et le contrôle extérieur fait par le professeur, tous les deux conçus dans le sens profond, caractérisé de cette manière par František Wolff [14]: bien qu'un chapitre de la théorie ait déjà été élaboré à fond et que les nouvelles idées aient été introduites, ni le professeur ni l'élève ne peuvent être sûrs que tout a été correctement saisi, que tous les fils nouveaux ont été bien enlacés dans les connaissances antérieures. La preuve ne peut être faite autrement que par la résolution de problèmes.

Parmi les aspects psychologiques du rôle des problèmes mathématiques, on met en évidence d'un côté leur influence qui stimule l'activité mathématique des élèves, développe leur intérêt pour les mathématiques, et de l'autre celui qui développe leur conception des mathématiques en tant que science et son rapport avec la réalité; les facteurs effectifs, les valeurs éducatives ayant un caractère plus général comme par exemple la patience, l'exactitude, la technique du travail intellectuel, etc.

On s'efforce dans la suite d'esquisser les critères de la construction d'un « bon problème mathématique » et d'une « bonne collection des problèmes mathématiques », à partir des deux points de vue que je viens de mentionner.

J'ai dit « qu'on s'efforce », car cette recherche se trouve évidemment encore dans les langes.

On se concentre le plus souvent sur les critères d'un « bon problème d'introduction », l'analyse du « bon problème d'apprentissage » dans le sens le plus profond, ainsi que du « bon problème de contrôle » n'a été touchée que très superficiellement dans les rapports.

R.P. Dilworth [6] dans le dossier américain formule certains principes de la construction des bons problèmes vus dans l'aspect du processus de l'enseignement par exemple :

1. La compréhension de la notion qui doit être introduite par le problème donné est essentielle pour la solution ;

2. La notion ou la propriété envisagée sont mises en évidence par la recherche de la solution la plus simple ou la plus élégante ;

3. Les connaissances et les méthodes déjà connues sont appliquées dans des situations non habituelles ;

4. La solution du problème exige la généralisation des concepts et des opérations connues ;

5. La solution la plus rationnelle du problème exige l'élimination consciente des procédés stéréotypés et le choix de la voie nouvelle la plus directe ;

6. Le problème donne à l'élève l'occasion d'apercevoir un système de relations qui n'est pas fermé, et qui ouvre le chemin à une variété de conclusions non évidentes et non banales.

Concernant le rôle du problème dans le contrôle des acquisitions mathématiques des élèves, J. Brookes [15] dans le rapport anglais, postule l'introduction de problèmes non entièrement élaborés dans les questions d'examens. Cette proposition très intéressante évidemment, n'est pas facile à réaliser, mais néanmoins mérite d'être expérimentée.

En analysant du point de vue psychologique la question de l'activation de la pensée mathématique de l'élève, on souligne avant tout les caractères suivants d'un bon problème :

1. Il doit être intéressant pour l'élève et provoquer son désir d'effort et de recherche; il doit avoir un sens pour l'élève. Les opinions concernant l'interprétation de ce sens sont souvent totalement opposées. La majorité des auteurs soulignent la nécessité d'utiliser comme point de départ des situations réelles, familières aux élèves, ayant un sens pratique. D'un autre côté on constate que les enfants jusqu'à l'âge de 15 ans ne s'intéressent pas du tout aux problèmes pratiques et, qu'au contraire, le domaine de la fantaisie et des devinettes est ici le plus favorable à éveiller leur intérêt pour les mathématiques et motiver leur travail intellectuel. Il semble que cette opposition si frappante découle du fait que l'attitude des enfants dépend essentiellement des conditions extérieures sociales et culturelles, ainsi que de l'esprit général de l'éducation, qui n'est le même ni dans les divers pays, ni dans les divers groupes sociaux du même pays.

Le problème peut avoir aussi pour l'élève un sens lié aux mécanismes intérieurs des mathématiques mêmes; la recherche d'un schéma englobant les cas particuliers et éliminant les exceptions, la rationalisation et la simplification du procédé déjà connu, la recherche d'une issue pour une contradiction frappante, etc., sont accessibles pour les élèves mêmes très jeunes.

On observe le grand intérêt porté par beaucoup d'élèves justement à des procédés tout à fait abstraits et méthodologiques. La question concernant les types des problèmes qui éveillent l'intérêt particulier des élèves devrait donc être étudiée d'une manière objective. Les comptes rendus détaillés de leçons contenant la description des réactions des élèves comme celles par exemple qui ont été présentées par George Steiner dans le rapport allemand [2, 3] sont évidemment extrêmement instructifs au point de vue de cette recherche.

2. Le second caractère du bon problème considéré au point de vue de l'élève même, c'est l'adaptation des difficultés de la résolution à ses possibilités. L'élève doit non seulement vouloir mais aussi pouvoir résoudre le problème. Le découragement des enfants provoqué par des questions mathématiques trop difficiles est évidemment une des causes principales des échecs de notre enseignement, au même degré que le freinage de leur développement par des problèmes plats de routine et par le dilettantisme mathématique nocif basé sur des devinettes n'exigeant ni de connaissances solides ni d'habileté. En rapport avec cette question George Polya [12] accentue la nécessité d'un ordre psychologique dans la suite des problèmes dont les types particuliers sont mieux adaptés à certains niveaux qu'à d'autres.

Pour ma part, je voudrais mentionner un phénomène, souvent observé qui jette de la lumière sur les remarques de Polya. Voici l'exemple choisi parmi beaucoup d'autres analogues : l'élève âgé de 12 ans qui connaît déjà certaines démonstrations géométriques reste tout à fait passif devant le problème : démontrer que l'angle au centre est le double de l'angle inscrit correspondant. Il commence le travail immédiatement et le termine avec succès, quand on change la formulation : la mesure de l'angle inscrit étant calculer le mesure de l'angle au centre correspondant. La voie qui a conduit l'élève à une réponse correcte n'est que la démonstration qui a été demandée précédemment en vain. Le même phénomène a été observé dans d'autres situations chez certains élèves plus âgés : « calculez, trouvez » a été plus mobilisant que « démontrez », quoique le premier problème soit plus difficile, puisque sa solution exige la découverte du théorème ainsi que de sa démonstration.

La question de l'appréciation à priori des difficultés caractéristiques pour certains types de problèmes est extrêmement compliquée. Cette question est posée expressément dans le rapport anglais, où l'on propose même la recherche d'un genre de mesure qu'on pourrait utiliser dans ce domaine. Ces projets sont encore peu précisés. Le rapport anglais présente aussi des esquisses de classification de problèmes mathématiques faites de divers points de vue.

Malheureusement, la question très importante de l'enseignement des stratégies dans la résolution des problèmes n'a pas été suffisamment développée. Certains auteurs mettent même en doute la possibilité de cet enseignement. Mais, de l'autre côté, on souligne avec force la nécessité de recherches dans ce domaine, malgré toutes les difficultés fort bien connues qui concernent avant tout la méthode de cette recherche. L'analyse des mathématiques mêmes, la confrontation des solutions différentes des mêmes problèmes dans leur développement historique, l'auto-observation du professeur, l'aide des mathématiciens créateurs, d'un côté, et l'observation du travail spontané et dirigé des élèves de l'autre, peuvent apporter certains résultats utiles. L'enseignement des méthodes et des stratégies est — selon nos expériences — non seulement possible, mais absolument nécessaire. Les recherches en cours sous ma direction révèlent déjà des perspectives très intéressantes pour la méthodologie de l'enseignement. La popularité des livres de George Polya prouve que le besoin de cette aide est ressenti par les professeurs et par les élèves — malgré que les exemples qui y sont utilisés appartiennent au contenu traditionnel.

Le problème urgent, dont j'ai déjà eu l'occasion de parler, c'est l'élaboration de collections de problèmes adaptés aux programmes modernisés et avant tout à leur esprit.

Cette question se trouve, avant toutes les autres, au centre des considérations dans le rapport américain. On constate que les auteurs de manuels nouveaux se sont concentrés sur le développement des parties théoriques ; ils négligent l'élaboration de collections de problèmes de type nouveau, ayant la valeur pédagogique des collections traditionnelles. En conséquence l'élève qui ne peut pas utiliser les collections anciennes adaptées à un autre contenu et à un autre esprit reste sans cette aide si importante dans son travail personnel. C'est pourquoi — comme le constate Peter Lax, dans le rapport américain — « la solution des problèmes mathématiques par les élèves aux Etats-Unis est en déclin » [10, p. 2].

5. CONCLUSIONS

Les rapports des Sous-Commissions de la CIEM mettent en évidence que le problème pédagogique que nous étudions aujourd'hui est encore dans une large mesure ouvert et exige une recherche particulièrement profonde, qui ne pourra pas avoir lieu sans la collaboration des savants et des pédagogues.

Les objectifs les plus pressants de ce travail semblent être les suivants :

1^o développement de la recherche fondamentale concernant la méthodologie de l'enseignement de la résolution des problèmes ;

2^o construction de collections de problèmes adaptés aux programmes et à l'esprit nouveaux ;

3^o élaboration des moyens et des formes de la préparation consciente des futurs maîtres à « l'enseignement par les problèmes » au cours de leurs études ;

4^o recherche et expériences relatives à l'évaluation des progrès faits par les élèves en vue d'éliminer l'influence nocive de l'enseignement « pour les examens » paralysant la véritable activation de la pensée mathématique.

LES MATÉRIAUX ENVOYÉS PAR LES SOUS-COMMISSIONS NATIONALES
DE LA C.I.E.M. AU RAPPORTEUR

Allemagne Fédérale

1. H. ATHEN: *Die Aktivität der Schüler im Mathematikunterricht.*
2. H. O. STEINER: *Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie.* Der Mathematikunterricht, 11 (1962).
3. H. O. STEINER: *Mathematisierung und Axiomatisierung einer politischen Struktur.* Der Mathematikunterricht, 12 (1966).
4. M. WAGENSCHHEIN: *Pädagogische Aufsätze zum mathematischen Unterricht.* Der Mathematikunterricht, 4 (1962).

Espagne

5. *Informe de la Subcomisión Española para el mejoramiento de la enseñanza de la matematica en el grado medio.* (P. ABELLANAS.)

Etats-Unis

6. R. P. DILWORTH: *The role of problems in Mathematical Education.*
7. N. J. FINE: *Some thoughts on problemsolving.*
8. F. D. JACOBSON: *Remarks of mathematical activity.*
9. Ph. S. JONES: *The role of problems in secondary School Mathematics.*
10. P. LAX: *The role of problems in the High School Mathematics Curriculum.*
11. A. O. POLLAK: *On individual exploration in mathematics education.*
12. G. POLYA: *On teaching problem-solving* (paraîtra en français dans *L'Enseignement Mathématique*, 13 (1967)).
13. P. C. ROSENBLOOM: *Problem making and problem solving.*
14. F. WOLF: *Problems in the teaching of mathematics.*

Grande-Bretagne

15. *The development of mathematical ability in school children, the place of the problem in this development.*

A report to the British Mathematical Instruction Subcommittee 1966. (G. GILES, C. T. DALTRY, R. C. LYNESS, J. BUNNELL, H. M. CUNDY, A. E. POPE, A. W. BELL, D. S. FIELKER, L. R. ROGERS, D. E. MANSFIELD, R. ATKIN, D. H. WHEELER, J. E. HARRIS, G. A. E. LONGMORE, V. UNDERWOOD, C. BANWELL, G. BEAUMONT, W. COWDEROY, D. TAHTA, J. OLIVER, W. M. BROOKES, E. E. BIGGS, R. M. FYPE, R. R. SKEMP, B. T. BELLIS, compendium from Nottingham College of Education, papers from Abbey Wood School Report from Derby Branch of ATM.)

Hongrie

16. *Rapport de la Sous-Commission nationale hongroise de la C.I.E.M. : Le développement de l'activité mathématique des élèves.* (I. REIMAN et J. SURÁNYI.)

Norvège

17. *Rapport de la Sous-Commission norvégienne de la C.I.E.M. sur l'activité des élèves.* (Kay PIENE.)

Japon

18. *Rapport de la Sous-Commission nationale japonaise de la C.I.E.M.* (S. IYANAGA.)

Suède

19. *Rapport de la Sous-Commission nationale suédoise de la C.I.E.M. sur le développement de l'activité mathématique des élèves.* (M. HASTAD.)

Suisse

20. *Information de la Sous-Commission nationale suisse de la C.I.E.M.* (M. RUEFF.)

M^{me} A. Z. Krygowska
Ecole Normale Supérieure
Krakow
Pologne.