

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 12 (1966)  
**Heft:** 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FIBRES SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE  
**Autor:** Godbillon, C. / Reeb, G.  
**Kapitel:** 5. Classification des fibres séparés  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-40748>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Si  $y_0$  est dans  $A$  (resp.  $y_1$  dans  $B$ ) on a aussi  $y$  dans  $A$  (resp. dans  $B$ ) pour  $y \leq y_0$  (resp.  $y \geq y_1$ ). Les ensembles  $A$  et  $B$  sont donc des intervalles disjoints recouvrant  $\mathfrak{R}$ . L'un des deux, par exemple  $A$ , est fermé; on note alors  $z$  le plus grand élément de  $A$ .

Soit  $(\zeta_n)$  une suite de nombres négatifs tendant vers 0 telle que  $g_{\zeta_n}(z) < 0$  pour tout  $n$ . On peut trouver une suite strictement décroissante  $(y_n)$  tendant vers  $z$  telle que  $g_{\zeta_n}(y_n) < 0$ . Chacun des  $y_n$  étant dans  $B$ , il existe  $\xi_n > \zeta_n$  tel que  $g_{\xi_n}(y_n) = 0$ . La proposition 4 montre alors que cette situation est impossible si  $E$  est séparé; on a donc  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ .

Supposons maintenant que pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$  on a  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$ .

Soient  $(\xi_n)$  une suite de nombres négatifs tendant vers 0 et  $(y_n)$  une suite ayant une limite finie. Si  $z$  est un majorant de la suite  $(y_n)$  on a  $g_{\xi_n}(y_n) \leq g_{\xi_n}(z)$  pour tout  $n$ ; et par suite  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\xi_n}(y_n) = -\infty$ . L'espace  $E$  est donc séparé.

C.q.f.d.

#### COROLLAIRE.

|| Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x^{-1}(y) = +\infty$  pour tout  $y \in \mathfrak{R}$ .

### 5. CLASSIFICATION DES FIBRÉS SÉPARÉS

Soient  $\eta = (E, p, X)$  et  $\eta' = (E', p', X)$  deux fibrés sur  $X$  associés à des changements de carte  $g$  et  $g'$ , et tels que  $E$  et  $E'$  soient séparés.

#### PROPOSITION 6.

|| Soit  $F$  un isomorphisme de  $\eta$  sur  $\eta'$  pour le groupe  $G^+$  induisant un homéomorphisme  $f$  de  $X$  ayant  $o_1$  comme point fixe. On a alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ .

La démonstration est immédiate.

Plus précisément, on a d'ailleurs:

#### THÉORÈME.

|| Pour que les fibrés séparés  $\eta$  et  $\eta'$  soient équivalents dans le groupe  $G^+$ , il faut et il suffit qu'on ait  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ .

La condition nécessaire est une conséquence de la proposition 6. Supposons donc que  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y) = -\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$  (le cas

où cette limite est  $+\infty$  se traiterait de façon analogue).

**LEMME 1.**

Il existe une application  $f$  de  $[-1, 0[$  dans  $\mathfrak{R}$  ayant les propriétés suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
- b)  $g_{-1}(f(-1)) = 0$
- c)  $g_x(f(x)) < 0$  pour tout  $x > -1$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(f(x)) = -\infty$ .

*Démonstration.* — Soit  $(y_n)_{n \geq 1}$  une suite strictement croissante de nombres positifs tendant vers l'infini. On peut construire une suite strictement croissante  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  dans  $] -1, 0 [$  tendant vers 0 et telle que l'on ait pour tout  $n$   $g_x(y_n) < -n$  pour  $x \geq \xi_n$ .

On a alors

$$\begin{aligned} g_x(y_n) &< -n & \text{pour } x \in [\xi_n, \xi_{n+1}] \\ g_{\xi_{n+1}}(y) &< -(n+1) & \text{pour } y \in [y_n, y_{n+1}]. \end{aligned}$$

Il existe donc un homéomorphisme croissant  $f_n$  de  $[\xi_n, \xi_{n+1}]$  sur  $[y_n, y_{n+1}]$  tel que  $g_x(f_n(x)) < -n$  pour tout  $x \in [\xi_n, \xi_{n+1}]$ . Le recollement des  $f_n$  détermine  $f$  sur l'intervalle  $[\xi_1, 0 [$ ; on étend alors  $f$  à  $[-1, 0 [$  de façon à satisfaire aux conditions a) et b).

C.q.f.d.

On construit de même une application  $f'$  de  $[-1, 0 [$  dans  $\mathfrak{R}$  ayant les propriétés a), b), c), d) du lemme 1 avec  $g'$  en place de  $g$ .

On désigne par  $F$  (resp.  $F'$ ) le fermé réunion de la droite  $x = 0$  et de l'ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $-1 \leq x < 0$  et  $|y| \leq |g_x(f(x))|$  (resp.  $|y| \leq |g'(f'(x))|$ ).

**LEMME 2.**

Il existe un homéomorphisme de  $F$  sur  $F'$  de la forme  $(x, y) \rightarrow (x, e_x(y))$  où pour tout  $x$ ,  $e_x$  est une application croissante, et  $e_0 =$  identité.

*Démonstration.* — On définit  $e_x(y)$  par

$$\begin{aligned} e_x(y) &= y & \text{si } |y| \leq \frac{1}{2} \inf(|g_x(f(x))|, |g'_x(f'(x))|) \\ e_x(g_x(f(x))) &= g'_x(f'(x)) \end{aligned}$$

$$e_x(-g_x(f(x))) = -g'_x(f'(x))$$

$e_x$  est affine pour  $y \geq \frac{1}{2} \inf(|g_x(f(x))|, |g'_x(f'(x))|)$   
 et  $y \leq -\frac{1}{2} \inf(|g_x(f(x))|, |g'_x(f'(x))|)$

C.q.f.d.

LEMME 3.

Il existe une application continue  $\alpha$  de  $\mathfrak{R}$  dans  $G^+$  ayant les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \text{identité pour } x \leq -1 \quad \text{et } x \geq 0 \\ \alpha_x(y) &= g_x^{-1} e_x^{-1} g'_x(y) \quad \text{si } g'_x(y) \in F' .\end{aligned}$$

On construit  $\alpha$  par un procédé analogue à celui utilisé dans la démonstration du lemme 2.

*Démonstration du théorème.* — On définit une application continue  $\beta$  de  $\mathfrak{R}$  dans  $G^+$  par

$$\begin{aligned}\beta_x &= \text{identité} & \text{si } x \geq 0 \\ \beta_x(y) &= e_x(y) & \text{si } (x, y) \in F \\ \beta_x(y) &= g'_x \alpha_x^{-1} g_x^{-1}(y) & \text{si } x < 0 \text{ et } (x, y) \notin F .\end{aligned}$$

On a alors  $\beta_x g_x \alpha_x = g'_x$  pour tout  $x < 0$ .

C.q.f.d.

COROLLAIRE 1.

Pour le groupe  $G^+$  il existe deux classes d'équivalence de fibrés séparés sur  $X$ .

En effet, si  $\eta$  est défini par un changement de carte  $g$  tel que  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$  il est équivalent dans  $G^+$  au fibré  $\eta_1$

associé au changement de carte  $g'_x(y) = y + \frac{1}{x}$ .

Si, par contre,  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = +\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ ,  $\eta$  est équivalent dans  $G^+$  au fibré  $\eta_2$  associé au changement de carte  $g''_x(y) = y - \frac{1}{x}$ .

Enfin on a remarqué après la proposition 2 que les fibrés  $\eta_1$  et  $\eta_2$  ne sont pas équivalents dans  $G$ .

Mais  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont isomorphes dans  $G^+$  et équivalents dans  $G$ ; on a donc:

COROLLAIRE 2.

|| Tous les fibrés séparés sur  $X$  sont isomorphes pour le groupe  $G^+$ .

COROLLAIRE 3.

|| Tous les fibrés séparés sur  $X$  sont équivalents pour le groupe  $G$ .

On peut traduire ces corollaires dans la théorie des feuilletages du plan. Rappelons pour cela que deux structures feuilletées  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  du plan sont équivalentes pour un groupe  $\Gamma$  d'homéomorphismes du plan s'il existe un homéomorphisme  $f$  dans  $\Gamma$  qui transforme chaque feuille de  $\mathcal{F}$  en une feuille de  $\mathcal{F}'$ ; si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont orientées  $f$  doit de plus être compatible avec les orientations de ces feuilles. On a alors (comparer à [2]):

COROLLAIRE 4.

|| Tous les feuilletages (non orientés) du plan dont l'espace des feuilles est le branchemet simple sont équivalents pour le groupe des homéomorphismes conservant l'orientation.

COROLLAIRE 5.

|| Pour le groupe des homéomorphismes conservant l'orientation, les feuilletages orientés du plan dont l'espace des feuilles est le branchemet simple se répartissent en deux classes d'équivalence.

COROLLAIRE 6.

|| Tous les feuilletages orientés du plan dont l'espace des feuilles est le branchemet simple sont équivalents pour le groupe des homéomorphismes.

## 6. SPÉCIALISATION DU GROUPE DE STRUCTURE

Les résultats précédents montrent que chaque fibré séparé sur  $X$  est équivalent dans  $G^+$  à un fibré pour lequel le changement de carte prend ses valeurs dans le groupe  $T$  des translations de  $\mathfrak{R}$ . On peut donc se proposer d'étudier les fibrés localement triviaux de base  $X$ , de fibre  $\mathfrak{R}$  et de groupe  $T$ ; un changement de carte s'identifie alors à une application continue de  $]-\infty, 0]$  dans  $\mathfrak{R}$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux telles applications, les fibrés associés sont isomorphes dans  $T$  si et seulement si il existe un homéomorphisme  $f$  de