Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1966)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FIBRES SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE

Autor: Godbillon, C. / Reeb, G.

Kapitel: 4. Critères de séparation

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40748

Si deux tels fibrés sont isomorphes dans G^+, l'homéomorphisme correspondant du plan est compatible avec ces deux orientations; par contre un isomorphisme dans G, et non dans G^+ induit un homéomorphisme compatible avec les orientations des feuilletages, mais renversant l'orientation du plan.

4. Critères de séparation

Soient $\eta = (E, p, X)$ un fibré sur X, Φ_1 et Φ_2 des trivialisations de η/U_1 et η/U_2, et g le changement de carte associé.

Les ensembles $p^{-1}(U_1)$, $p^{-1}(U_2)$ et $p^{-1}(X - \{o_1, o_2\})$ sont des ouverts séparés de E. Par conséquent si $e_1 \in p^{-1}(U_1)$ et $e_2 \in p^{-1}(U_2)$ sont des points non séparés de E on a $e_1 = \Phi_1(0, y)$ et $e_2 = \Phi_2(0, z)$.

Proposition 4.

Pour que E soit non séparé, il faut et il suffit qu'il existe
une suite (ξ_n) de nombres négatifs tendant vers 0,
une suite (y_n) ayant une limite finie y,
telles que la suite $(g_{\xi_n}(y_n)$ ait une limite finie z.

Démonstration. — La condition est suffisante car la suite $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$ converge simultanement vers les points $e_i = \Phi_1(0,y)$ et $e_2 = \Phi_2(0,z)$.
Supposons réciproquement que $e_1 = \Phi_1(0,y)$ et $e_2 = \Phi_2(0,z)$ soient deux points non séparés de E. Soient $(V_n)_{n \in N}$ (resp. $(W_n)_{n \in N}$) un système fondamental de voisinages emboités de e_1 (resp. de e_2) contenus dans $p^{-1}(U_1)$ (resp. $p^{-1}(U_2)$). Pour tout n on peut trouver un point $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$ dans $V_n \cap W_n$. La suite (ε_n) tend alors simultanément vers e_1 et vers e_2 ; les suites (ξ_n), (y_n) et $(g(\xi_n) y_n)$ ont donc respectivement 0, y et z pour limites.

C.q.f.d.

Corollaire.

Soit z un point d'accumulation de $g_x(y)$ pour y fixé et x tendant vers 0. Alors les points $\Phi_1(0, y)$ et $\Phi_2(0, z)$ ne sont pas séparés dans E.

Exemples. — Soient $(\eta_i)_{0 \leqq i \leqq 7}$ les fibrés associés aux changements de carte suivants:

$$0 - \quad g_x(y) = y$$

$$1 - \quad g_x(y) = y + \sin\frac{1}{x}$$

$$2 - \quad g_x(y) = y + \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$3 - \quad g_x(y) = y + \frac{1}{x}\, sin\, \frac{1}{x}$$

$$4 - \quad g_x(y) = -xy$$

$$5 - \quad g_x(y) = \begin{cases} -xy & si\ |y| \leqq 1 \\ -x + y - 1 & si\ \ y \geqq 1 \\ x + y + 1 & si\ \ y \leqq -1 \end{cases}$$

$$6 - \quad g_x(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{x} & si\ y \leqq 0 \\ y + \frac{1}{x} + exp\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right) & si\ y > 0 \end{cases}$$

$$7 - \quad g_x(y) = y + \frac{1}{x}$$

On déduit du corollaire précédent que les fibrés $(\eta_i)_{0 \leqq i \leqq 5}$ ne sont pas séparés, et de la proposition 4 que η_6 est aussi non séparé alors que η_7 est séparé.

On peut d'ailleurs remarquer, en considérant les ensembles d'accumulation de $g_x(y)$ pour y fixé et x tendant vers 0, que ces fibrés sont tous distincts (deux à deux non isomorphes).

Ces exemples montrent aussi comment on peut varier à l'infini le type des fibrés sur X.

PROPOSITION 5.

Pour que E soit séparé il faut et il suffit que pour tout y dans $\mathfrak{R}$ on ait $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = -\infty$ (ou $+\infty$).

Démonstration. — Si E est séparé, le corollaire de la proposition 4 montre que $g_x(y)$ n'a pas de point d'accumulation à distance finie pour y fixé et x tendant vers 0; on a donc $\lim |g_x(y)| = \infty$ pour tout y dans $\mathfrak{R}$.

Désignons par A (resp. B) l'ensemble des points y de $\mathfrak{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = -\infty$ (resp. $= +\infty$) et supposons A et B non vides.

Si y_o est dans A (resp. y_1 dans B) on a aussi y dans A (resp. dans B) pour $y \leqq y_0$ (resp. $y \geqq y_1$). Les ensembles A et B sont donc des intervalles disjoints recouvrant $\mathfrak{R}$. L'un des deux, par exemple A, est fermé; on note alors z le plus grand élément de A.

Soit (ζ_n) une suite de nombres négatifs tendant vers 0 telle que $g_{\zeta_n}(z) < 0$ pour tout n. On peut trouver une suite strictement décroissante (y_n) tendant vers z telle que $g_{\xi_n}(y_n) < 0$. Chacun des y_n étant dans B, il existe $\xi_n > \zeta_n$ tel que $g_{\xi_n}(y_n) = 0$. La proposition 4 montre alors que cette situation est impossible si E est séparé; on a donc $A = \phi$ ou $B = \phi$.

Supposons maintenant que pour tout y dans $\mathfrak{R}$ on a $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = -\infty$. Soient (ξ_n) une suite de nombres négatifs tendant vers 0 et (y_n) une suite ayant une limite finie. Si z est un majorant de la suite (y_n) on a $g_{\xi_n}(y_n) \leqq g_{\xi_n}(z)$ pour tout n; et par suite $\lim\limits_{n \to \infty} g_{\xi_n}(y_n) = -\infty$. L'espace E est donc séparé.

C.q.f.d.

COROLLAIRE.

Si $\lim g_x(y) = -\infty$ pour tout y dans $\mathfrak{R}$, $\lim\limits_{x \to o} g_x^{-1}(y) = +\infty$ pour tout $y \in \mathfrak{R}$.

5. Classification des fibrés séparés

Soient $\eta = (E, p. X)$ et $\eta' = (E', p', X)$ deux fibrés sur X associés à des changements de carte g et g', et tels que E et E' soient séparés.

PROPOSITION 6.

Soit F un isomorphisme de η sur η' pour le groupe G^+ induisant un homéomorphisme f de X ayant o_1 comme point fixe. On a alors $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = \lim\limits_{x \to 0} g'_x(y)$ pour tout y dans $\mathfrak{R}$.

La démonstration est immédiate.

Plus précisément, on a d'ailleurs:

THÉORÈME.

Pour que les fibrés séparés η et η' soient équivalents dans le groupe G^+, il faut et il suffit qu'on ait $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = \lim\limits_{x \to 0} g'_x(y)$ pour tout y dans $\mathfrak{R}$

La condition nécessaire est une conséquence de la proposition 6. Supposons donc que $\lim\limits_{x \to 0} g_x(y) = \lim\limits_{x \to 0} g'_x(y) = -\infty$ pour tout y dans $\mathfrak{R}$ (le cas