Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1966)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FIBRES SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE

Autor: Godbillon, C. / Reeb, G.

Kapitel: 3. Fibres sur le branchement simple

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40748

ayant le branchement simple pour espaces des feuilles, résultat qui précise ici un théorème général de W. Kaplan [2].

Dans une dernière partie on restreint le groupe structural des fibrés au groupe des translations et au groupe des difféomorphismes de $\mathfrak{R}$. Dans ce cas-ci on obtient aussi un théorème de classification des fibrés différentiables séparés; par contre on ne peut plus en déduire une classification différentiable des feuilletages différentiables du plan.

2. Le branchement simple

Soient $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ deux exemplaires de la droite réelle paramétrés respectivement par x_1 et x_2. Le branchement simple X est le quotient de la somme topologique $\Sigma = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ par la relation d'équivalence qui identifie les points x_1 et x_2 pour $x_1 = x_2 = x < 0$. On note π la projection de Σ sur X.

L'espace X est une variété topologique de dimension 1 non séparée. En effet $U_1 = \pi(\mathfrak{R}_1)$ et $U_2 = \pi(\mathfrak{R}_2)$ sont des ouverts de X, et les restrictions de π à $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ définissent un atlas de X; on identifiera l'intersection $U = U_1 \cap U_2$ avec l'intervalle $]-\infty, 0[$ de $\mathfrak{R}$. Les points $o_1 \in U_1$ et $o_2 \in U_2$, images par π des origines de $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$, sont les points de branchement de X (points non séparés).

L'involution de Σ qui échange les deux exemplaires $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ définit une involution continue h de X qui échange les deux ouverts U_1 et U_2 en laissant fixes les points de U.

Plus généralement, un homéomorphisme f de X laisse U_1 et U_2 invariants ou les permute; le premier cas est caractérisé par $f(o_1) = o_1$ (ou $f(o_2) = o_2$), le second par $f(o_1) = o_2$ (ou $f(o_2) = o_1$). Dans tous les cas on a $f(U) = U$.

On peut enfin remarquer que le branchement simple est un espace contractile, donc acyclique.

3. Fibrés sur le branchement simple

Soit $\eta = (E, p, X)$ un fibré localement trivial de base X et de fibre $\mathfrak{R}$; tous les fibrés intervenant dans la suite étant de ce type, on dira simplement que η est un fibré sur X.

On peut considérer η comme un fibré à groupe structural au sens de Steenrod [3]; le groupe de structure est ici le groupe G des homéomorphismes de la droite réelle $\mathfrak{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Les fibrés induits par η sur les ouverts U_1 et U_2 sont triviaux. Deux trivialisations $\Phi_1: U_1 \times \mathfrak{R} \to p^{-1}(U_1)$ et $\Phi_2: U_2 \times \mathfrak{R} \to p^{-1}(U_2)$) de η/U_1 et η/U_2 déterminent alors un changement de carte continu $g:]-\infty, 0[\to G$ (noté $x \to g_x$) tel que

$$\Phi_1(x_1, y) = \Phi_2(x_2, g_x(y)) \quad \text{pour } x_1 = x_2 = x < 0 .$$

Réciproquement une application continue g de $]-\infty, 0[$ dans G permet de construire un fibré $\eta = (E, p, X)$ sur X; g détermine de plus des triavialisations Φ_1 et Φ_2 de η/U_1 et η/U_2.

Soit g' une seconde application continue de $]-\infty, 0[$ dans G et soient $\eta' = (E', p', X)$ le fibré associé, Φ_1' et Φ_2' les trivialisations correspondantes de η/U_1 et η'/U_2. Un isomorphisme F de η sur η' détermine un homéomorphisme f de X. Si o_1 est un point fixe de f, on peut trouver deux applications continues α et β de $\mathfrak{R}$ dans G telles que

$$F\Phi_1(x_1, y) = \Phi_1'(f(x_1), \alpha_{x_1}(y))$$
$$F\Phi_2(x_2, y) = \Phi_2'(f(x_2), \beta_{x_2}(y));$$

la condition de compatibilité s'écrit alors

$$g'_{f(x)}\alpha_x = \beta_x g_x \qquad \text{pour tout} \quad x < 0 .$$

Réciproquement la donnée de deux applications continues α et β de $\mathfrak{R}$ dans G et d'un homéomorphisme f de $]-\infty, 0]$ vérifiant la condition de compatibilité précédente permet de construire un isomorphisme F de η sur η'.

Si par contre f échange o_1 et o_2 la condition de compatibilité s'écrit

$$\alpha_x = g'_{f(x)}\beta_x g_x \qquad \text{pour tout} \quad x < 0 .$$

Les fibrés η et η' sont équivalents dans G si on peut trouver un isomorphisme F pour lequel f est l'identité.

PROPOSITION 1.

Soit $\eta = (E, p, X)$ un fibré sur X. On peut réduire le groupe de structure de η au sous-groupe G^+ des homéomorphismes croissants de $\mathfrak{R}$.

Démonstration. — Le groupe G des homéomorphismes de $\mathfrak{R}$ a deux composantes connexes par arcs: le sous-groupe G^+ et l'ensemble G^- des homéomorphismes décroissants.

Soit g le changement de carte associé à des trivialisations de η/U_1 et η/U_2. Si g est à valeurs dans G^-, η est équivalent au fibré associé à $-g$; il suffit en effet de prendre $\alpha_x = -\beta_x =$ identité pour tout $x \in \mathfrak{R}$.

COROLLAIRE.

Tout fibré sur X est orientable.

On supposera dorénavant que les fibrés sur X sont définis par un changement de carte à valeurs dans G^+

PROPOSITION 2.

Les fibrés η et η' associés aux changements de carte $x \to g_x$ et $x \to g_x^{-1}$ sont isomorphes dans G^+.

Il suffit en effet de prendre pour α et β l'application constante de $\mathfrak{R}$ sur l'identité, et pour homéomorphisme de X l'involution h.

Remarque. — Les fibrés η et η' ne sont pas en général équivalents dans G^+ comme le montre l'exemple où g est défini par $g_x(y) = y + \dfrac{1}{x}$.

Mais dans cet exemple η et η' sont équivalents dans G (on prend $\alpha_x = \beta_x = -$ identité pour tout $x \in \mathfrak{R}$). Par contre si g est défini par $g_x(y) = -xy$, η et η' ne sont pas équivalents dans G.

PROPOSITION 3.

Soit $\eta = (E, p, X)$ un fibré sur X. L'espace E est une variété topologique de dimension 2 (en général non séparée), simplement connexe et acyclique.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la trivialité locale et de la suite exacte d'homotopie de η [3].

COROLLAIRE.

Si E est séparé, il est homéomorphe au plan $\mathfrak{R}^2$. Les fibres de η définissent alors un feuilletage du plan ayant X pour espace des feuilles.

Remarque. — Dans cette dernière situation le changement de carte g définit non seulement une orientation du feuilletage, mais aussi une orientation du plan.

Si deux tels fibrés sont isomorphes dans G^+, l'homéomorphisme correspondant du plan est compatible avec ces deux orientations; par contre un isomorphisme dans G, et non dans G^+ induit un homéomorphisme compatible avec les orientations des feuilletages, mais renversant l'orientation du plan.

4. Critères de séparation

Soient $\eta = (E, p, X)$ un fibré sur X, Φ_1 et Φ_2 des trivialisations de η/U_1 et η/U_2, et g le changement de carte associé.

Les ensembles $p^{-1}(U_1)$, $p^{-1}(U_2)$ et $p^{-1}(X - \{o_1, o_2\})$ sont des ouverts séparés de E. Par conséquent si $e_1 \in p^{-1}(U_1)$ et $e_2 \in p^{-1}(U_2)$ sont des points non séparés de E on a $e_1 = \Phi_1(0, y)$ et $e_2 = \Phi_2(0, z)$.

PROPOSITION 4.

Pour que E soit non séparé, il faut et il suffit qu'il existe
une suite (ξ_n) de nombres négatifs tendant vers 0,
une suite (y_n) ayant une limite finie y,
telles que la suite $(g_{\xi_n}(y_n)$ ait une limite finie z.

Démonstration. — La condition est suffisante car la suite $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$ converge simultanement vers les points $e_i = \Phi_1(0,y)$ et $e_2 = \Phi_2(0,z)$.
Supposons réciproquement que $e_1 = \Phi_1(0,y)$ et $e_2 = \Phi_2(0,z)$ soient deux points non séparés de E. Soient $(V_n)_{n \in N}$ (resp. $(W_n)_{n \in N}$) un système fondamental de voisinages emboités de e_1 (resp. de e_2) contenus dans $p^{-1}(U_1)$ (resp. $p^{-1}(U_2)$). Pour tout n on peut trouver un point $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$ dans $V_n \cap W_n$. La suite (ε_n) tend alors simultanément vers e_1 et vers e_2 ; les suites (ξ_n), (y_n) et $(g(\xi_n)\, y_n)$ ont donc respectivement 0, y et z pour limites.

C.q.f.d.

COROLLAIRE.

Soit z un point d'accumulation de $g_x(y)$ pour y fixé et x tendant vers 0. Alors les points $\Phi_1(0, y)$ et $\Phi_2(0, z)$ ne sont pas séparés dans E.

Exemples. — Soient $(\eta_i)_{0 \leqq i \leqq 7}$ les fibrés associés aux changements de carte suivants: