Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 12 (1966)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FIBRES SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE

Autor: Godbillon, C. / Reeb, G.

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40748

FIBRÉS SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE

par C. Godbillon et G. Reeb

1. Introduction

On sait l'intérêt que présentent les variétés topologiques non séparées à une dimension dans l'étude des feuilletages du plan. En effet, tout feuilletage $\mathscr{F}$ du plan possède les propriétés suivantes:

a) les feuilles de $\mathscr{F}$ sont fermées et homéomorphes à la droite réelle $\mathfrak{R}$ [1];

b) l'espace des feuilles X de $\mathscr{F}$ est une variété topologique à une dimension, en général non séparée, simplement connexe et à base dénombrable [1];

c) la projection canonique du plan sur X est une fibration localement triviale [2].

La situation la plus simple (en dehors du cas bien connu où X est la droite réelle $\mathfrak{R}$) est celle où X est le branchement simple [1]. La non séparation de X met alors en défaut les deux résultats fondamentaux suivants [3]:

— un fibré localement trivial dont la base est contractile est trivial;

— un fibré localement trivial dont la fibre est contractile a une section.

Le but de cet article est d'aborder, sur le cas du branchement simple, une étude des fibrés localement triviaux de fibre $\mathfrak{R}$ dont la base est une variété à une dimension non séparée.

Après avoir obtenu des critères de séparation et de non séparation de l'espace total, on montre comment le type de ces fibrés peut varier à l'infini. Sans vouloir en expliciter une classification générale (d'un intérêt d'ailleurs limité), on donne cependant un théorème d'unicité des fibrés ayant un espace total séparé. Ces fibrés, qui sont tous isomorphes pour le groupe des homéomorphismes croissants de la droite, se répartissent en deux classes d'équivalence pour ce groupe; par contre, ils sont tous équivalents pour le groupe des homéomorphismes.

Interprété en termes de structures feuilletées du plan, ce théorème permet de donner une classification de ces feuilletages (orientés ou non) ayant le branchement simple pour espaces des feuilles, résultat qui précise ici un théorème général de W. Kaplan [2].

Dans une dernière partie on restreint le groupe structural des fibrés au groupe des translations et au groupe des difféomorphismes de $\mathfrak{R}$. Dans ce cas-ci on obtient aussi un théorème de classification des fibrés différentiables séparés; par contre on ne peut plus en déduire une classification différentiable des feuilletages différentiables du plan.

2. Le branchement simple

Soient $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ deux exemplaires de la droite réelle paramétrés respectivement par x_1 et x_2. Le branchement simple X est le quotient de la somme topologique $\Sigma = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ par la relation d'équivalence qui identifie les points x_1 et x_2 pour $x_1 = x_2 = x < 0$. On note π la projection de Σ sur X.

L'espace X est une variété topologique de dimension 1 non séparée. En effet $U_1 = \pi(\mathfrak{R}_1)$ et $U_2 = \pi(\mathfrak{R}_2)$ sont des ouverts de X, et les restrictions de π à $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ définissent un atlas de X; on identifiera l'intersection $U = U_1 \cap U_2$ avec l'intervalle $]-\infty, 0[$ de $\mathfrak{R}$. Les points $o_1 \in U_1$ et $o_2 \in U_2$, images par π des origines de $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$, sont les points de branchement de X (points non séparés).

L'involution de Σ qui échange les deux exemplaires $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ définit une involution continue h de X qui échange les deux ouverts U_1 et U_2 en laissant fixes les points de U.

Plus généralement, un homéomorphisme f de X laisse U_1 et U_2 invariants ou les permute; le premier cas est caractérisé par $f(o_1) = o_1$ (ou $f(o_2) = o_2$), le second par $f(o_1) = o_2$ (ou $f(o_2) = o_1$). Dans tous les cas on a $f(U) = U$.

On peut enfin remarquer que le branchement simple est un espace contractile, donc acyclique.

3. Fibrés sur le branchement simple

Soit $\eta = (E, p, X)$ un fibré localement trivial de base X et de fibre $\mathfrak{R}$; tous les fibrés intervenant dans la suite étant de ce type, on dira simplement que η est un fibré sur X.

On peut considérer η comme un fibré à groupe structural au sens de Steenrod [3]; le groupe de structure est ici le groupe G des homéomor-