REMARQUES CONCERNANT UN PROBLÈME DE REPRÉSENTATION DES VARIÉTÉS GÉNÉRALISÉES, ET SON RAPPORT AU MOUVEMENT STATIONNAIRE D'UN FLUIDE [1] [2]

par L. C. Young

A la mémoire de mon père,
à l'occasion de son centenaire.

1. Introduction.

Nous avons fait allusion, dans plusieurs travaux, au rôle que peuvent jouer, dans la mécanique des fluides, certaines questions de la théorie des variétés généralisées. C'est le cas du problème de représentation que nous discuterons ici, et qui n'est autre, en fin de compte, que celui de retrouver la description lagrangienne d'un mouvement fluide stationnaire. C'est un problème qui nous a occupé à plusieurs reprises: il concerne la représentabilité d'une variété généralisée comme mélange de variétés plus simples, et le cœur du problème consiste, à proprement parler, à montrer que toute variété généralisée, dont la frontière est bénigne, aurait également un substratum bénin. Cette espèce d'énoncés, dont la conclusion est, pour ainsi dire, plus forte que l'hypothèse, peut être nommée progressive. On en trouve un peu partout en mathématique, et leur importance a été relevée par H. Poincaré. Il est vraisemblable qu'il existe, pour les variétés généralisées k-dimensionnelles de l'espace à n dimensions, un tel théorème progressif. C'est ce que nous vérifions ici pour les cas où $k = 0, 1, n-1, n$. Les cas intermédiaires, où $k = 2, 3, \ldots, n-2$, se trouvent encore hors de la portée de nos

[1] Sponcered by the Mathematics Research Center, U.S. Army, Madison, Wisconsin, under Contract No. DA-11-022-ORD-2059, and by the Nat. Sc. Foundation under Contract NSF-G18909.

[2] Conférence faite à Lausanne le 28 octobre 1963.

méthodes: cela tient, comme nous l'avons indiqué ailleurs [13, III, V], à notre ignorance de toutes sortes de choses des plus simples. La valeur $k = 1$ est celle qui se présente dans le mouvement des fluides; ce cas n'a pas été traité précédemment, sauf pour $n = 2$ [9]. Le cas où $k = n - 1$ a été traité, un peu plus tard, pour $n = 3$, avec quelques restrictions supplémentaires concernant la frontière. Les valeurs $k = 0$ et $k = n$ donnent lieu à deux cas dégénérés, dont le premier est trivial, tandis que le second se relie à des travaux récents sur les gradients généralisés [3].

2. Descriptions eulériennes et lagrangiennes.

Dans la suite, on sous-entendra les conventions usuelles de l'analyse: les ensembles seront boréliens, les fonctions mesurables dans le même sens, les ensembles de mesure nulle, par rapport à la mesure dont il s'agit au moment donné, seront négligés.

Un mouvement fluide stationnaire dans l'espace à n dimensions se définit, dans la description eulérienne, par une mesure μ et par une fonction, à valeurs vectorielles, $v = v(x)$ que nous nommons la vitesse au point x. Nous supposerons μ à valeurs finies, au moins pour les ensembles compacts. La mesure μ est celle de la quantité du fluide se trouvant dans un ensemble quelconque; on l'exprime souvent par l'intégrale de volume correspondante de la densité ρ du fluide. Dans le cas le plus général, ρ est une distribution de Schwartz; dans un grand nombre de problèmes classiques ρ est une constante, mais ici nous supposerons plutôt que $v(x)$ est un vecteur de grandeur unité, ce qui ne représente pas une restriction véritable, puisque la vitesse n'intervient que multipliée par la densité ρ qu'on aura modifiée convenablement pour compenser. De toute façon, nous considérons la mesure μ comme un élément fondamental de la description eulérienne, tout autant que la vitesse unité, définie par le vecteur $v(x)$.

Dans la mécanique classique des fluides, on passe de la description eulérienne à celle de Lagrange, en résolvant le