

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR QUELQUES POLYÈDRES EN GÉOMÉTRIE DES NOMBRES  
**Autor:** Ehrhart, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39976>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR QUELQUES POLYÈDRES EN GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

par E. EHRHART,

Dans un article paru dans *L'Enseignement mathématique*, tome X (1964), pp. 138-146, nous avons formulé une conjecture relative à un corps convexe fermé: Ses hauteurs  $a, b, c$  dans les directions des axes orthonormés, son volume  $V$ , sa surface  $S$  et le nombre  $j$  de ses points entiers vérifient la relation

$$(1) \quad j \leq V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1 ;$$

l'égalité n'est atteinte que pour les parallélépipèdes entiers, dont les arêtes sont parallèles aux axes.

Nous allons démontrer cette relation pour trois classes de polyèdres convexes.

Rappelons qu'un polygone ou un polyèdre sont dits *entiers*, si les coordonnées de leurs sommets sont des nombres entiers. Le *périmètre réticulaire* d'un polygone entier s'obtient en prenant comme unité de longueur sur chaque côté la maille du réseau rectiligne de ses points entiers. De même l'*aire réticulaire* d'un polyèdre s'obtient en prenant comme unité d'aire dans chaque face la maille du réseau plan de ses points entiers.

## I. *Prisme entier*

Soit ( $P$ ) un prisme convexe entier fermé,  $j$  le nombre de ses points entiers,  $p$  le nombre de points entiers de sa surface,  $V$  son volume,  $S$  son aire et  $S', l', \beta'$  respectivement les mesures réticulaires de sa surface, d'une arête latérale et du périmètre de sa base.

On sait que

$$j - \frac{p}{2} = V + l' + \frac{\beta'}{2}, \quad (1)$$

---

<sup>1)</sup> *Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, 243, 1956, p. 349 (formule 3).

ou, comme  $p = S' + 2^1$ ),

$$(2) \quad j = V + \frac{S'}{2} + l' + \frac{\beta'}{2} + 1 .$$

Si  $a, b, c$  sont les dimensions du parallélépipède ( $\mathcal{P}$ ) circonscrit à ( $P$ ) parallèlement aux plans de coordonnées,  $l' < c$  et  $\beta' \leq \beta \leq 2(a+b)$ , où  $\beta$  est le périmètre réticulaire de la projection d'une base de ( $P$ ) sur le plan  $XOY$ . D'autre part,  $S' \leq S$ . Donc (2) entraîne (1), où l'égalité n'est atteinte que si ( $P$ ) et ( $\mathcal{P}$ ) coïncident.

## II. Tronc de prisme entier, dont une base a un centre de symétrie

Soit  $\omega$  le centre de symétrie d'une base convexe fermée ( $B'$ ),  $j'$  le nombre de ses points entiers,  $p'$  le nombre de points entiers de son contour,  $s'$  son aire,  $s''$  son aire réticulaire et  $a', b', c'$  ses hauteurs dans les directions des axes de coordonnées. Le symétrique ( $P_2$ ) du tronc de prisme ( $P_1$ ) par rapport à  $\omega$  complète ( $P_1$ ) à un prisme, qui vérifie (1). Comme les caractéristiques de ( $P_2$ ) sont les mêmes que celles de  $P_1$  (dotées de l'indice 1),

$$\begin{aligned} j &= 2j_1 - j' , & S &= 2S_1 - 2s' , & V &= 2V_1 , \\ a &= 2a_1 - a' , & b &= 2b_1 - b' , & c &= 2c_1 - c' . \end{aligned}$$

Par ces substitutions, (1) devient

$$(3) \quad j_1 \leq V_1 + \frac{S_1}{2} + a_1 + b_1 + c_1 + 1 + \frac{1}{2}(j' - s' - a' - b' - c' - 1) .$$

Or  $j' = s'' + \frac{p'}{2} + 1$  (corollaire du théorème 1 de l'article cité au début). Mais  $s'' \leq s'$  et  $p' \leq p'' \leq 2(a'+b')$ , où  $p''$  désigne le nombre de points entiers de la projection du contour de ( $B'$ ) sur le plan  $XOY$ . (Ceci suppose que le plan de ( $B'$ ) ne soit pas perpendiculaire à  $XOY$ , en quel cas on projetterait sur  $XOZ$  ou sur  $YOZ$ .) Dans (3) l'expression entre parenthèses est donc négative ou nulle.

<sup>1)</sup> *Comptes rendus*, 242, 1956, p. 2217 (formule 1).

### III. Une famille de pyramides

Soit ( $P$ ) une pyramide dont le pied de la hauteur entière  $c$  se trouve dans la base fermée convexe, qui est située dans le plan des axes  $OX$ ,  $OY$  et a pour hauteurs dans la direction de ces axes  $a$  et  $b$ . On suppose  $12c \geq b \geq a$ .

Coupons ( $P$ ) par le plan  $Z = c - n$ . Soient  $j_n$  le nombre de points entiers de la section fermée et  $s_n, l_n$  sa surface et son périmètre. On sait (voir l'article mentionné au début) que

$$j_n < s_n + \frac{l_n}{2} + 1.$$

Par suite

$$(4) \quad j = 1 + \sum_1^{n=c} j_n < \sum_1^c s_n + \frac{1}{2} \sum_1^c l_n + c + 1.$$

Comme  $s_n = n^2 \frac{s_c}{c^2}$ ,

$$\sum_1^c s_n = \frac{c(c+1)(2c+1)}{6} \frac{s_c}{c^2} = \frac{s_c}{6c} (2c^2 + 3c + 1) = V + \frac{s_c}{2} + \frac{s_c}{6c}.$$

D'autre part,  $l_n = \frac{n}{c} l_c$  donne

$$\sum_1^c \frac{cl_c}{2} + \frac{l_c}{2} < S' + \frac{l_c}{2},$$

où  $S'$  désigne la surface latérale de la pyramide. De (4) on déduit alors

$$j < V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1 + \left( \frac{s_c}{6c} + \frac{l_c}{4} - a - b \right).$$

Il reste à montrer que l'expression entre parenthèses est négative ou nulle. Comme

$$s_c \leq \frac{ab}{2} \quad \text{el} \quad l_c \leq 2(a+b),$$

il suffit que

$$\frac{ab}{12c} \leq \frac{a+b}{2},$$

qui est vérifiée car  $12c \geq b$  et  $a+b \geq 2a$ .

Remarque. — *L'inégalité (1) est donc en particulier vérifiée par tout tétraèdre entier*  $O(o, o, o)$   $A(a, o, o)$   $B(o, b, o)$   $C(o, o, c)$ .

*(reçu le 30 janvier 1964)*

E. Ehrhart  
11, rue de Bruges  
Strasbourg