Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

Autor: Hersch, Joseph

Kapitel: § 3. Application aux problèmes aux limites

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39972

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 20.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Pour toute paire $\{ f(x, y),\ g(x, y) \}$ satisfaisant (11), on a

$$d[-[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f, g;\ -[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA\ ,$$

d'où par (10):

$$(12) \qquad d = \mathrm{Max}_{f,g} \{ \tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA \}$$

sous les conditions (11) et

$$(13) \qquad \begin{cases} f(x, y) \text{ continue } \textit{en } x\,, \text{ ainsi que } f_x\ ;\ f_{xx} \text{ existe;} \\ g(x, y) \text{ continue } \textit{en } y\,, \text{ ainsi que } g_y\ ;\ g_{yy} \text{ existe;} \\ f = g = \chi(s) \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

2.5. *Remarque.* — Il nous reste une liberté: la manière (arbitraire) dont nous remplaçons v par f ou par g dans F, sous la condition (6). Même si v n'apparaît pas explicitement dans F, nous sommes libres d'ajouter, dans $\tilde{F}$, des expressions s'annulant lorsque $f \equiv g$. En particulier, si nous remplaçons $\tilde{F}$ par $\tilde{F} + v\,.\,(f - g)$ avec $v(x, y)$ arbitraire, $\tilde{J}[f, g]$ devient $\tilde{J}[f, g] + \iint_G v\,.\,(f - g)\, dA = \tilde{J}[f, g;\ v]$. Cela nous montre que, si nous réservons notre liberté dans la construction de $\tilde{F}$, le choix $\lambda(x, y) \equiv 0$ ne signifie pas une restriction. La condition (11) devient alors

$$(11^*) \qquad [\tilde{F}]_f = [\tilde{F}]_g = 0\,;$$

donc

$$(12^*) \qquad d = \mathrm{Max}_{\left\{\begin{array}{l}\text{construction de } \tilde{F} \text{ satisfaisant (6)} \\ \text{choix de } f \text{ et } g \text{ satisfaisant (11*) et (13)}\end{array}\right.} \tilde{J}[f, g]\ .$$

§ 3. Application aux problèmes aux limites

Reprenons le problème considéré en 1.3. Le principe variationnel (I) est celui de Dirichlet (4): $F(x, y, v, v_x, v_y) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \rho v$; je pose *(par exemple !)* $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f$; la condition (6) est satisfaite; la condition (11) est ici:

$$(11') \qquad f_{xx} + g_{yy} = -\rho(x, y)\ .$$

Nos hypothèses *(a)* et *(b)* sont satisfaites: $\lambda(x, y)$ étant choisie, f est déterminée par $f_{xx} = \lambda - \rho$ dans G et $f = \chi(s)$ sur Γ; g est déterminée par $g_{yy} = -\lambda$ dans G et $g = \chi(s)$ sur Γ: *ce sont les « problèmes auxiliaires unidimensionnels »*. — Nous avons alors

$$\tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA$$

$$= \iint_G \left[\frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f + \rho f + f f_{xx} + g g_{yy}\right] dA$$

$$= \oint_\Gamma \chi(s)\left(f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds - \frac{1}{2}\iint_G (f_x^2 + g_y^2)\, dA\,;$$

d'où par (12):

$$(12') \quad d = \operatorname{Max}_{\substack{f,\, g \text{ satisfaisant} \\ (13) \text{ et } (11')}} \left[\oint_\Gamma \chi(s)\left(f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds - \frac{1}{2}\iint_G (f_x^2 + g_y^2)\, dA\right].$$

Ceci est précisément le principe de Thomson (5), restreint aux champs particuliers $\vec{p} = (f_x, g_y)$ avec $f = g = \chi(s)$ sur Γ. Ces champs concurrents, qui tiennent compte des conditions aux limites, sont « les meilleurs »: il est en effet facile [7, 8] de montrer que, si $p_{1_x} = f_{xx}$ et $p_{2_y} = g_{yy}$, la borne (12′) fournie par le champ (f_x, g_y) est plus précise que (ou égale à) celle (5) fournie par $\vec{p}$. (12′) a été obtenue auparavant [7, 8] par la considération de problèmes auxiliaires unidimensionnels, et admet une interprétation physique simple (à l'aide du principe du Minimum de l'énergie potentielle).

Remarque. — On peut obtenir le même résultat (12′) en utilisant (12*) au lieu de (12): on choisit alors arbitrairement $\rho_1(x, y)$ et l'on pose $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho_1 f - (\rho - \rho_1) g$; nos hypothèses sont de nouveau satisfaites: f est déterminée par $f = \chi(s)$ sur Γ et l'équation d'Euler $0 = [\tilde{F}]_f = -\rho_1 - f_{xx}$; g est déterminée par $g = \chi(s)$ sur Γ et $0 = [\tilde{F}]_g = -(\rho - \rho_1) - g_{yy}$; sous la condition (11′), nous avons alors par (12*), en introduisant $\rho_1 = -f_{xx}$ et $\rho - \rho_1 = -g_{yy}$, $d \geqq \tilde{J}[f, g] = \iint_G [\frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) + f f_{xx} + g g_{yy}]\, dA$ comme ci-dessus, d'où (12′).