Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

Autor: Hersch, Joseph

Kapitel: § 3. Application aux problèmes aux limites

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39972

Pour toute paire $\{ f(x, y),\ g(x, y) \}$ satisfaisant (11), on a

$$d[-[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f, g; -[\tilde{F}]_f] = \tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA ,$$

d'où par (10):

$$d = \mathrm{Max}_{f,g} \{ \tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g)\, dA \} \tag{12}$$

sous les conditions (11) et

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) \text{ continue } \textit{en } x \text{, ainsi que } f_x \text{ ; } f_{xx} \text{ existe;} \\ g(x, y) \text{ continue } \textit{en } y \text{, ainsi que } g_y \text{ ; } g_{yy} \text{ existe;} \\ f = g = \chi(s) \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. \tag{13}$$

2.5. *Remarque.* — Il nous reste une liberté: la manière (arbitraire) dont nous remplaçons v par f ou par g dans F, sous la condition (6). Même si v n'apparaît pas explicitement dans F, nous sommes libres d'ajouter, dans $\tilde{F}$, des expressions s'annulant lorsque $f \equiv g$. En particulier, si nous remplaçons $\tilde{F}$ par $\tilde{F} + \nu \cdot (f - g)$ avec $\nu(x, y)$ arbitraire, $\tilde{J}[f, g]$ devient $\tilde{J}[f, g] + \iint_G \nu \cdot (f - g)\, dA = \tilde{J}[f, g; \nu]$. Cela nous montre que, si nous réservons notre liberté dans la construction de $\tilde{F}$, le choix $\lambda(x, y) \equiv 0$ ne signifie pas une restriction. La condition (11) devient alors

$$[\tilde{F}]_f = [\tilde{F}]_g = 0 ; \tag{11*}$$

donc

$$d = \mathrm{Max}_{\left\{\substack{\text{construction de } \tilde{F} \text{ satisfaisant (6)} \\ \text{choix de } f \text{ et } g \text{ satisfaisant (11*) et (13)}}\right.} \tilde{J}[f, g] . \tag{12*}$$

§ 3. Application aux problèmes aux limites

Reprenons le problème considéré en 1.3. Le principe variationnel (I) est celui de Dirichlet (4): $F(x, y, v, v_x, v_y) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \rho v$; je pose *(par exemple !)* $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f$; la condition (6) est satisfaite; la condition (11) est ici:

$$f_{xx} + g_{yy} = -\rho(x, y) . \tag{11'}$$

Nos hypothèses *(a)* et *(b)* sont satisfaites: $\lambda(x, y)$ étant choisie, f est déterminée par $f_{xx} = \lambda - \rho$ dans G et $f = \chi(s)$ sur Γ; g est déterminée par $g_{yy} = -\lambda$ dans G et $g = \chi(s)$ sur Γ: *ce sont les « problèmes auxiliaires unidimensionnels ».* — Nous avons alors

$$\tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g) dA$$

$$= \iint_G \left[\frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f + \rho f + f f_{xx} + g g_{yy}\right] dA$$

$$= \oint_\Gamma \chi(s)\left(f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds - \frac{1}{2}\iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA\,;$$

d'où par (12):

(12′) $$d = \operatorname{Max}_{\left\{\substack{f,\, g \text{ satisfaisant} \\ (13) \text{ et } (11')}\right.} \left[\oint_\Gamma \chi(s)\left(f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds - \frac{1}{2}\iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA\right].$$

Ceci est précisément le principe de Thomson (5), restreint aux champs particuliers $\vec{p} = (f_x, g_y)$ avec $f = g = \chi(s)$ sur Γ. Ces champs concurrents, qui tiennent compte des conditions aux limites, sont « les meilleurs »: il est en effet facile [7, 8] de montrer que, si $p_{1_x} = f_{xx}$ et $p_{2_y} = g_{yy}$, la borne (12′) fournie par le champ (f_x, g_y) est plus précise que (ou égale à) celle (5) fournie par $\vec{p}$. (12′) a été obtenue auparavant [7, 8] par la considération de problèmes auxiliaires unidimensionnels, et admet une interprétation physique simple (à l'aide du principe du Minimum de l'énergie potentielle).

Remarque. — On peut obtenir le même résultat (12′) en utilisant (12*) au lieu de (12): on choisit alors arbitrairement $\rho_1(x, y)$ et l'on pose $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho_1 f - (\rho - \rho_1) g$; nos hypothèses sont de nouveau satisfaites: f est déterminée par $f = \chi(s)$ sur Γ et l'équation d'Euler $0 = [\tilde{F}]_f = -\rho_1 - f_{xx}$; g est déterminée par $g = \chi(s)$ sur Γ et $0 = [\tilde{F}]_g = -(\rho - \rho_1) - g_{yy}$; sous la condition (11′), nous avons alors par (12*), en introduisant $\rho_1 = -f_{xx}$ et $\rho - \rho_1 = -g_{yy}$, $d \geqq \tilde{J}[f, g] = \iint_G [\frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) + f f_{xx} + g g_{yy}] dA$ comme ci-dessus, d'où (12′).