

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A
CELLE DE FRIEDRICH, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES
PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

Autor: Hersch, Joseph
Kapitel: § 1. Introduction
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39972>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

par Joseph HERSCH

§ 1. Introduction

1.1. K. O. FRIEDRICHS ([5]; voir aussi [2], pp. 201-9) a découvert en 1929 une transformation variationnelle involutive, faisant passer d'un principe de Minimum caractérisant une grandeur d à un principe de Maximum « dual », caractérisant la même grandeur d . — L'intérêt numérique de cette double caractérisation est évident: si (comme c'est généralement le cas) la grandeur d ne peut être déterminée exactement, le premier principe permettra de l'évaluer par excès, le second de l'évaluer par défaut. — L'intérêt théorique est considérable: il réside surtout dans la dualité elle-même; mais aussi dans le fait que, appliquée à un problème aux limites, la transformation de Friedrichs fait passer du principe de Dirichlet au principe de Thomson (à propos de ces principes: cf. [13, 3]). — L'idée de base est très simple: si, dans un principe de Minimum, on élargit la classe des fonctions admises à concurrence, le Minimum diminue (ou reste inchangé).

1.2. Les raisonnements qui suivent s'appliquent à un nombre fini quelconque de dimensions; pour fixer les idées, nous considérons un domaine régulier G du plan, de contour Γ , et, dans G , un problème de variation initial (I) du type:

$$(I) \quad \begin{cases} d = \text{Min}_v \iint_G F(\vec{x}, v, \text{grad } v) dA, \\ \text{sous la condition: } v = \chi(s) \text{ donnée sur } \Gamma; \end{cases}$$

\vec{x} désigne le rayon vecteur (x, y) , $dA = dx dy$ est l'élément d'aire, s mesure l'arc sur la courbe Γ .

La transformation de Friedrichs consiste à « dissocier » ν de grad ν dans l'intégrale ci-dessus: on y remplace grad ν par un champ vectoriel \vec{q} (alors on a $F(\vec{x}, \nu, \vec{q})$), et l'on traite les conditions auxiliaires $\vec{q} - \text{grad } \nu = \vec{0}$ dans G et $\nu - \chi(s) = 0$ sur Γ à l'aide de multiplicateurs de Lagrange $\vec{p}(\vec{x})$ et $\mu(s)$ respectivement; ν et \vec{q} varient désormais indépendamment. On obtient ainsi un « problème libre »; on passe ensuite de celui-ci au « problème dual » (D) en *imposant à priori* les conditions naturelles suivantes du problème libre:

- (1) $F_{\vec{q}} = \vec{p}$ (c'est-à-dire: $F_{q_i} = p_i$), et $F_\nu = \text{div } \vec{p}$ dans G ;
 (2) $\vec{p} \cdot \vec{n} = \mu(s)$ sur Γ (\vec{n} = normale extérieure).

On postule en général que, à l'aide des conditions (1), on puisse tirer ν et \vec{q} en fonction de \vec{x} , \vec{p} et $\text{div } \vec{p}$. On pose alors (transformation de Legendre)

$$(3) \quad \Psi(\vec{x}, \vec{p}, \text{div } \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + \nu \text{div } \vec{p} - F(\vec{x}, \nu, \vec{q})$$

et l'on obtient le problème dual:

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} d = \text{Max}_{\vec{p}} \left\{ - \iint_G \Psi(\vec{x}, \vec{p}, \text{div } \vec{p}) dA + \oint_\Gamma \chi(s) \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right\} \\ \text{sous la condition } \text{div } \vec{p} = F_\nu. \end{array} \right.$$

1.3. Considérons un problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson: $\Delta u = -\rho(\vec{x})$ dans G , $u = \chi(s)$ sur Γ (ρ et χ = fonctions données); posons

$$d = \oint_\Gamma \chi(s) \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{2} D(u) = + \frac{1}{2} D(u) - \iint_G \rho u dA,$$

où $D(u)$ est l'intégrale de Dirichlet $\iint_G \text{grad}^2 u dA$; le principe de Dirichlet nous dit:

$$(4) \quad d = \text{Min}_{v=\chi(s) \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{1}{2} D(v) - \iint_G \rho v dA \right\}.$$

On a donc ici

$$F(\vec{x}, \nu, \vec{q}) = \frac{1}{2} \vec{q}^2 - \rho \nu; \quad \vec{p} = F_{\vec{q}} = \vec{q}; \quad \text{div } \vec{p} = F_\nu = -\rho;$$

$$\Psi(\vec{x}, \vec{p}, \operatorname{div} \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + v \operatorname{div} \vec{p} - F = \frac{1}{2} \vec{p}^2 ;$$

d'où le principe dual:

$$(5) \quad d = \operatorname{Max}_{\operatorname{div} \vec{p} = -\rho} \left\{ \oint_{\Gamma} \chi(s) \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds - \frac{1}{2} \iint_G \vec{p}^2 \, dA \right\},$$

qui n'est autre que le principe de Thomson (cf. [13]); le champ extrémal est $\vec{p} = \operatorname{grad} u$. Les champs vectoriels \vec{p} concurrents satisfont l'équation différentielle, mais aucune condition aux limites.

1.4. Nous considérerons au § 2 une transformation variationnelle analogue (mais non involutive), reposant non plus sur une dissociation de ρ et $\operatorname{grad} \rho$, mais bien sur une dissociation de la fonction ρ elle-même en *deux* fonctions f et g (le domaine G étant à *deux* dimensions). Au § 3, nous appliquerons cette transformation au problème considéré en 1.3 ci-dessus: elle fait correspondre au principe de Dirichlet un principe très voisin de celui de Thomson, mais restreignant les champs concurrents par des conditions aux limites; ce principe a été obtenu par la « méthode des problèmes auxiliaires unidimensionnels » [8, 7]. Au § 4, nous montrerons comment cette méthode s'applique également aux problèmes aux valeurs propres, et conduit, à partir du principe de Rayleigh, à un principe de Maximum pour λ_1 (la première valeur propre) déjà obtenu à l'aide de problèmes auxiliaires unidimensionnels [6, 7], inspirés par PAYNE-WEINBERGER [11]. Enfin, nous montrerons au § 5 qu'une forme essentiellement équivalente de ce principe de Maximum (mais plus proche du principe de Thomson), se rattachant à divers travaux dont quelques-uns déjà anciens [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4], peut être également obtenue en appliquant une transformation de Friedrichs à peine modifiée.

§ 2. La transformation variationnelle proposée

2.1. Nous partons de nouveau du problème (I) considéré en 1.2:

$$(I) \quad \begin{cases} d = \operatorname{Min}_v J[v] \text{ sous la condition } v = \chi(s) \text{ sur } \Gamma, \\ \text{où } J[v] = \iint_G F(x, y, v, v_x, v_y) \, dA. \text{ Nous supposons } F_{v_x v_y} = 0. \end{cases}$$