

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A  
CELLE DE FRIEDRICH, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES  
PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

**Autor:** Hersch, Joseph  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39972>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

par Joseph HERSCH

## § 1. Introduction

1.1. K. O. FRIEDRICHS ([5]; voir aussi [2], pp. 201-9) a découvert en 1929 une transformation variationnelle involutive, faisant passer d'un principe de Minimum caractérisant une grandeur  $d$  à un principe de Maximum « dual », caractérisant la même grandeur  $d$ . — L'intérêt numérique de cette double caractérisation est évident: si (comme c'est généralement le cas) la grandeur  $d$  ne peut être déterminée exactement, le premier principe permettra de l'évaluer par excès, le second de l'évaluer par défaut. — L'intérêt théorique est considérable: il réside surtout dans la dualité elle-même; mais aussi dans le fait que, appliquée à un problème aux limites, la transformation de Friedrichs fait passer du principe de Dirichlet au principe de Thomson (à propos de ces principes: cf. [13, 3]). — L'idée de base est très simple: si, dans un principe de Minimum, on élargit la classe des fonctions admises à concurrence, le Minimum diminue (ou reste inchangé).

1.2. Les raisonnements qui suivent s'appliquent à un nombre fini quelconque de dimensions; pour fixer les idées, nous considérons un domaine régulier  $G$  du plan, de contour  $\Gamma$ , et, dans  $G$ , un problème de variation initial (I) du type:

$$(I) \quad \begin{cases} d = \text{Min}_v \iint_G F(\vec{x}, v, \text{grad } v) dA, \\ \text{sous la condition: } v = \chi(s) \text{ donnée sur } \Gamma; \end{cases}$$

$\vec{x}$  désigne le rayon vecteur  $(x, y)$ ,  $dA = dx dy$  est l'élément d'aire,  $s$  mesure l'arc sur la courbe  $\Gamma$ .

La transformation de Friedrichs consiste à « dissocier »  $\nu$  de grad  $\nu$  dans l'intégrale ci-dessus: on y remplace grad  $\nu$  par un champ vectoriel  $\vec{q}$  (alors on a  $F(\vec{x}, \nu, \vec{q})$ ), et l'on traite les conditions auxiliaires  $\vec{q} - \text{grad } \nu = \vec{0}$  dans  $G$  et  $\nu - \chi(s) = 0$  sur  $\Gamma$  à l'aide de multiplicateurs de Lagrange  $\vec{p}(\vec{x})$  et  $\mu(s)$  respectivement;  $\nu$  et  $\vec{q}$  varient désormais indépendamment. On obtient ainsi un « problème libre »; on passe ensuite de celui-ci au « problème dual » (D) en imposant à priori les conditions naturelles suivantes du problème libre:

$$(1) \quad F_{\vec{q}} = \vec{p} \quad (\text{c'est-à-dire: } F_{q_i} = p_i), \text{ et } F_{\nu} = \text{div } \vec{p} \text{ dans } G;$$

$$(2) \quad \vec{p} \cdot \vec{n} = \mu(s) \quad \text{sur } \Gamma \quad (\vec{n} = \text{normale extérieure}).$$

On postule en général que, à l'aide des conditions (1), on puisse tirer  $\nu$  et  $\vec{q}$  en fonction de  $\vec{x}$ ,  $\vec{p}$  et  $\text{div } \vec{p}$ . On pose alors (transformation de Legendre)

$$(3) \quad \Psi(\vec{x}, \vec{p}, \text{div } \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + \nu \text{div } \vec{p} - F(\vec{x}, \nu, \vec{q})$$

et l'on obtient le problème dual:

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} d = \text{Max}_{\vec{p}} \left\{ - \iint_G \Psi(\vec{x}, \vec{p}, \text{div } \vec{p}) dA + \oint_{\Gamma} \chi(s) \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right\} \\ \text{sous la condition } \text{div } \vec{p} = F_{\nu}. \end{array} \right.$$

1.3. Considérons un problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson:  $\Delta u = -\rho(\vec{x})$  dans  $G$ ,  $u = \chi(s)$  sur  $\Gamma$  ( $\rho$  et  $\chi$  = fonctions données); posons

$$d = \oint_{\Gamma} \chi(s) \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{2} D(u) = + \frac{1}{2} D(u) - \iint_G \rho u dA,$$

où  $D(u)$  est l'intégrale de Dirichlet  $\iint_G \text{grad}^2 u dA$ ; le principe de Dirichlet nous dit:

$$(4) \quad d = \text{Min}_{v=\chi(s) \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{1}{2} D(v) - \iint_G \rho v dA \right\}.$$

On a donc ici

$$F(\vec{x}, \nu, \vec{q}) = \frac{1}{2} \vec{q}^2 - \rho \nu; \quad \vec{p} = F_{\vec{q}} = \vec{q}; \quad \text{div } \vec{p} = F_{\nu} = -\rho;$$

$$\Psi(\vec{x}, \vec{p}, \operatorname{div} \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + v \operatorname{div} \vec{p} - F = \frac{1}{2} \vec{p}^2 ;$$

d'où le principe dual:

$$(5) \quad d = \operatorname{Max}_{\operatorname{div} \vec{p} = -\rho} \left\{ \oint_{\Gamma} \chi(s) \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds - \frac{1}{2} \iint_G \vec{p}^2 \, dA \right\},$$

qui n'est autre que le principe de Thomson (cf. [13]); le champ extrémal est  $\vec{p} = \operatorname{grad} u$ . Les champs vectoriels  $\vec{p}$  concurrents satisfont l'équation différentielle, mais aucune condition aux limites.

1.4. Nous considérerons au § 2 une transformation variationnelle analogue (mais non involutive), reposant non plus sur une dissociation de  $\rho$  et  $\operatorname{grad} \rho$ , mais bien sur une dissociation de la fonction  $\rho$  elle-même en *deux* fonctions  $f$  et  $g$  (le domaine  $G$  étant à *deux* dimensions). Au § 3, nous appliquerons cette transformation au problème considéré en 1.3 ci-dessus: elle fait correspondre au principe de Dirichlet un principe très voisin de celui de Thomson, mais restreignant les champs concurrents par des conditions aux limites; ce principe a été obtenu par la « méthode des problèmes auxiliaires unidimensionnels » [8, 7]. Au § 4, nous montrerons comment cette méthode s'applique également aux problèmes aux valeurs propres, et conduit, à partir du principe de Rayleigh, à un principe de Maximum pour  $\lambda_1$  (la première valeur propre) déjà obtenu à l'aide de problèmes auxiliaires unidimensionnels [6, 7], inspirés par PAYNE-WEINBERGER [11]. Enfin, nous montrerons au § 5 qu'une forme essentiellement équivalente de ce principe de Maximum (mais plus proche du principe de Thomson), se rattachant à divers travaux dont quelques-uns déjà anciens [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4], peut être également obtenue en appliquant une transformation de Friedrichs à peine modifiée.

## § 2. La transformation variationnelle proposée

2.1. Nous partons de nouveau du problème (I) considéré en 1.2:

$$(I) \quad \begin{cases} d = \operatorname{Min}_v J[v] \text{ sous la condition } v = \chi(s) \text{ sur } \Gamma, \\ \text{où } J[v] = \iint_G F(x, y, v, v_x, v_y) \, dA. \text{ Nous supposons } F_{v_x v_y} = 0. \end{cases}$$



Dans cette expression, nous remplaçons  $\varphi_x$  par  $f_x$ ,  $\varphi_y$  par  $g_y$ , et *arbitrairement*  $\varphi(x, y)$  tantôt par  $f(x, y)$ , tantôt par  $g(x, y)$ ; nous obtenons une fonction  $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y)$  telle que

$$(6) \quad \tilde{F}(x, y, v, v, v_x, v_y) \equiv F(x, y, v, v_x, v_y);$$

$f(x, y)$  est supposée continue *en*  $x$ , ainsi que sa dérivée partielle  $f_x$ ;  $g(x, y)$  continue *en*  $y$ , ainsi que  $g_y$ ; on suppose l'existence de  $f_{xx}$  et  $g_{yy}$ .

*Remarque*, importante pour les applications: On n'exigera pas que les fonctions  $f$  et  $g$  soient continues!

Posons

$$\tilde{J}[f, g] = \iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) dA;$$

$\tilde{J}[\varphi, \varphi] = J[\varphi]$ , nous avons donc:

$$d = \text{Min}_{f, g} \tilde{J}[f, g]$$

sous les conditions  $f \equiv g$  dans  $G$  et  $f = g = \chi(s)$  sur  $\Gamma$ .

2.2. Introduisons un « multiplicateur de Lagrange »  $\lambda(x, y)$ ; je définis

$$(7) \quad d[\lambda] = \text{Min}_{\substack{f, g \\ f=g=\chi(s) \text{ sur } \Gamma}} \tilde{J}[f, g; \lambda],$$

$$\text{où } \tilde{J}[f, g; \lambda] = \tilde{J}[f, g] + \iint_G \lambda \cdot (f - g) dA$$

(donc  $\tilde{J}[f, g; 0] = \tilde{J}[f, g]$ ), et je fais les deux *hypothèses* suivantes:

(a) Ce Minimum variationnel existe pour toutes les fonctions  $\lambda(x, y)$  de la classe considérée;

(b) La paire de fonctions  $\{f, g\}$  (dépendant de  $\lambda$ ) qui réalise ce Minimum, est univoquement déterminée par les conditions d'Euler

$$(8) \quad \begin{cases} 0 = [\tilde{F} + \lambda(f - g)]_f = [\tilde{F}]_f + \lambda(x, y) = \tilde{F}_f - \frac{d}{dx} \tilde{F}_{f_x} + \lambda \\ 0 = [\tilde{F} + \lambda(f - g)]_g = [\tilde{F}]_g - \lambda(x, y) = \tilde{F}_g - \frac{d}{dy} \tilde{F}_{g_y} - \lambda \end{cases}$$

et la condition imposée  $f = g = \chi(s)$  sur  $\Gamma$ .

Quelle que soit  $\lambda(x, y)$  (dans la classe considérée), on a

$$(9) \quad d[\lambda] \leq d,$$

car

$$d = \text{Min}_{\substack{f, g \\ f=g=\chi(s) \text{ sur } \Gamma}} \tilde{J}[f, g; \lambda]$$

sous la condition supplémentaire  $f \equiv g$ .

2.3. La solution  $u(x, y)$  du problème de variation initial (I) satisfait l'équation d'Euler correspondante

$$0 = [F]_u = F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} - \frac{d}{dy} F_{u_y};$$

la paire de fonctions  $\{f, g\} = \{u, u\}$  satisfait donc

$$0 = [\tilde{F}]_f + [\tilde{F}]_g;$$

si donc, dans le problème de variation (7) définissant  $d[\lambda]$ , nous posons

$$\lambda(x, y) = -[\tilde{F}]_f|_{f \equiv u},$$

alors la paire de fonctions  $\{u, u\}$  satisfait les deux équations d'Euler (8); par l'unicité que nous avons postulée, elle réalise donc le Minimum

$$d[\lambda = -[\tilde{F}]_f|_{f \equiv u}];$$

celui-ci vaut donc  $J[u] = d$ . Sous les hypothèses (a) et (b) ci-dessus, nous avons donc par (9):

$$(10) \quad d = \text{Max}_{\lambda(x, y)} d[\lambda(x, y)].$$

Le raisonnement qui précède est calqué sur celui de Friedrichs, cf. [5] et [2].

2.4. Au lieu de choisir le « multiplicateur de Lagrange »  $\lambda(x, y)$ , on peut également choisir une paire de fonctions  $\{f(x, y), g(x, y)\}$  satisfaisant la condition

$$(11) \quad [\tilde{F}]_f + [\tilde{F}]_g \equiv \tilde{F}_f + \tilde{F}_g - \frac{d}{dx} \tilde{F}_{f_x} - \frac{d}{dy} \tilde{F}_{g_y} = 0;$$

on doit alors prendre  $\lambda(x, y) = -[\tilde{F}]_f = +[\tilde{F}]_g$ .

Pour toute paire  $\{ f(x, y), g(x, y) \}$  satisfaisant (11), on a  

$$d[-\tilde{F}]_f = \tilde{J}[f, g; -\tilde{F}]_f = \tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g) dA,$$
  
 d'où par (10):

$$(12) \quad d = \text{Max}_{f, g} \{ \tilde{J}[f, g] - \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g) dA \}$$

sous les conditions (11) et

$$(13) \quad \begin{cases} f(x, y) \text{ continue en } x, \text{ ainsi que } f_x; f_{xx} \text{ existe;} \\ g(x, y) \text{ continue en } y, \text{ ainsi que } g_y; g_{yy} \text{ existe;} \\ f = g = \chi(s) \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

2.5. *Remarque.* — Il nous reste une liberté: la manière (arbitraire) dont nous remplaçons  $\nu$  par  $f$  ou par  $g$  dans  $\tilde{F}$ , sous la condition (6). Même si  $\nu$  n'apparaît pas explicitement dans  $\tilde{F}$ , nous sommes libres d'ajouter, dans  $\tilde{F}$ , des expressions s'annulant lorsque  $f \equiv g$ . En particulier, si nous remplaçons  $\tilde{F}$  par  $\tilde{F} + \nu \cdot (f - g)$  avec  $\nu(x, y)$  arbitraire,  $\tilde{J}[f, g]$  devient  $\tilde{J}[f, g] + \iint_G \nu \cdot (f - g) dA = \tilde{J}[f, g; \nu]$ . Cela nous montre que, si nous réservons notre liberté dans la construction de  $\tilde{F}$ , le choix  $\lambda(x, y) \equiv 0$  ne signifie pas une restriction. La condition (11) devient alors

$$(11^*) \quad [\tilde{F}]_f = [\tilde{F}]_g = 0;$$

donc

$$(12^*) \quad d = \text{Max}_{\substack{\text{construction de } \tilde{F} \text{ satisfaisant (6)} \\ \text{choix de } f \text{ et } g \text{ satisfaisant (11}^*) \text{ et (13)}}} \tilde{J}[f, g].$$

### § 3. Application aux problèmes aux limites

Reprenons le problème considéré en 1.3. Le principe variationnel (I) est celui de Dirichlet (4):  $F(x, y, \nu, \nu_x, \nu_y) = \frac{1}{2}(\nu_x^2 + \nu_y^2) - \rho\nu$ ; je pose (*par exemple !*)  $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2}(f_x^2 + g_y^2) - \rho f$ ; la condition (6) est satisfaite; la condition (11) est ici:

$$(11') \quad f_{xx} + g_{yy} = -\rho(x, y).$$

Nos hypothèses (a) et (b) sont satisfaites:  $\lambda(x, y)$  étant choisie,  $f$  est déterminée par  $f_{xx} = \lambda - \rho$  dans  $G$  et  $f = \chi(s)$  sur  $\Gamma$ ;  $g$  est déterminée par  $g_{yy} = -\lambda$  dans  $G$  et  $g = \chi(s)$  sur  $\Gamma$ : ce sont les « problèmes auxiliaires unidimensionnels ». — Nous avons alors

$$\begin{aligned} \tilde{J}[f, g] &= \iint_G ([\tilde{F}]_f f + [\tilde{F}]_g g) dA \\ &= \iint_G \left[ \frac{1}{2} (f_x^2 + g_y^2) - \rho f + \rho f + f f_{xx} + g g_{yy} \right] dA \\ &= \oint_{\Gamma} \chi(s) \left( f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds - \frac{1}{2} \iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA; \end{aligned}$$

d'où par (12):

$$(12') \quad d = \text{Max}_{\left\{ \begin{smallmatrix} f, g \text{ satisfaisant} \\ (13) \text{ et } (11') \end{smallmatrix} \right\}} \left[ \oint_{\Gamma} \chi(s) \left( f_x \frac{\partial x}{\partial n} + g_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds - \frac{1}{2} \iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA \right].$$

Ceci est précisément le principe de Thomson (5), restreint aux champs particuliers  $\vec{p} = (f_x, g_y)$  avec  $f = g = \chi(s)$  sur  $\Gamma$ . Ces champs concurrents, qui tiennent compte des conditions aux limites, sont « les meilleurs »: il est en effet facile [7, 8] de montrer que, si  $p_{1x} = f_{xx}$  et  $p_{2y} = g_{yy}$ , la borne (12') fournie par le champ  $(f_x, g_y)$  est plus précise que (ou égale à) celle (5) fournie par  $\vec{p}$ . (12') a été obtenue auparavant [7, 8] par la considération de problèmes auxiliaires unidimensionnels, et admet une interprétation physique simple (à l'aide du principe du Minimum de l'énergie potentielle).

*Remarque.* — On peut obtenir le même résultat (12') en utilisant (12\*) au lieu de (12): on choisit alors arbitrairement  $\rho_1(x, y)$  et l'on pose  $\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) = \frac{1}{2} (f_x^2 + g_y^2) - \rho_1 f - (\rho - \rho_1) g$ ; nos hypothèses sont de nouveau satisfaites:  $f$  est déterminée par  $f = \chi(s)$  sur  $\Gamma$  et l'équation d'Euler  $0 = [\tilde{F}]_f = -\rho_1 - f_{xx}$ ;  $g$  est déterminée par  $g = \chi(s)$  sur  $\Gamma$  et  $0 = [\tilde{F}]_g = -(\rho - \rho_1) - g_{yy}$ ; sous la condition (11'), nous avons alors par (12\*), en introduisant  $\rho_1 = -f_{xx}$  et  $\rho - \rho_1 = -g_{yy}$ ,  $d \geq \tilde{J}[f, g] = \iint_G \left[ \frac{1}{2} (f_x^2 + g_y^2) + f f_{xx} + g g_{yy} \right] dA$  comme ci-dessus, d'où (12').

#### § 4. Application d'un raisonnement analogue aux problèmes aux valeurs propres

Comme exemple-type, je considère le problème de la vibration fondamentale d'une membrane couvrant un domaine  $G$  du plan et fixée sur le contour  $\Gamma$ : on cherche  $u_1(x, y)$  et un nombre  $\lambda_1$  tels que  $\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0$  et  $u_1 > 0$  dans  $G$ , et  $u_1 = 0$  sur  $\Gamma$ . Le principe de Rayleigh dit:

$$\lambda_1 = \text{Min}_{v=0 \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{D(v)}{\iint_G v^2 dA} \right\}.$$

On peut aussi l'énoncer ainsi:

$$(14) \quad \lambda_1 = \max k \text{ sous la condition: } \bigvee_{v=0 \text{ sur } \Gamma} D(v) - k \iint_G v^2 dA \geq 0.$$

Nous posons ici

$$\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) \equiv f_x^2 + g_y^2 - k [\mu f^2 + (1 - \mu) g^2],$$

où  $\mu(x, y)$  est une fonction arbitraire dans  $G$ ; la condition (6) est alors satisfaite. Nous avons maintenant, quelle que soit

$$\mu(x, y), \lambda_1 \geq \max k \text{ sous la condition } \bigvee_{\substack{f, g \text{ satisfaisant (13)} \\ \text{avec } \chi(s) \equiv 0}} \iint_G \tilde{F} dA \geq 0.$$

En effet, si l'on restreint  $f$  et  $g$  par  $f \equiv g$ , alors on retrouve pour  $k$  la condition (14); ici la classe des  $k$  admissibles a été restreinte, donc  $\max k$  est devenu plus petit.

Maintenons fixes le nombre  $k$  et la fonction  $\mu(x, y)$ , et cherchons les paires  $\{\hat{f}, \hat{g}\}$  qui rendent stationnaire l'intégrale: nous avons les deux équations d'Euler

$$0 = -\frac{1}{2} [\tilde{F}]_f = \hat{f}_{xx} + k\mu\hat{f}; \quad 0 = -\frac{1}{2} [\tilde{F}]_g = \hat{g}_{yy} + k(1 - \mu)\hat{g}.$$

Supposons (c'est essentiel ici!)  $\hat{f} > 0$  et  $\hat{g} > 0$  dans  $G$ . Eliminons  $\mu$ : les fonctions  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  satisfont

$$(15) \quad -\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} = k = \text{const.}$$

Réciproquement, si nous avons choisi une paire de fonctions  $\{\hat{f}, \hat{g}\}$  satisfaisant (15) avec  $k > 0$ , posons  $\mu(x, y) = -(1/k) (\hat{f}_{xx}/\hat{f})$ ; alors  $1 - \mu = -(1/k) (\hat{g}_{yy}/\hat{g})$ ; les équations d'Euler relatives à  $\mu$  sont alors satisfaites par  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$ . Pour  $f$  et  $g$  ( $= 0$  sur  $\Gamma$ ) quelconques, nous vérifions

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) dA &= \iint_G \left[ f_x^2 + g_y^2 + \frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} f^2 + \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} g^2 \right] dA \\ &= \iint_G \left[ \left( f_x - \frac{\hat{f}_x}{\hat{f}} f \right)^2 + \left( g_y - \frac{\hat{g}_y}{\hat{g}} g \right)^2 \right] dA \geq 0, \end{aligned} \right.$$

donc  $\lambda_1 \geq k$ ; on a l'égalité en choisissant  $\hat{f} = \hat{g} = u_1(x, y)$ , d'où

$$(17) \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\substack{\{\hat{f}, \hat{g} > 0 \text{ dans } G \text{ satisfaisant} \\ (15) \text{ et } (13) \text{ avec } \chi(s) \equiv 0\}}} \left( -\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} \right).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum plus général [7]:

$$(18) \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\substack{\{f, g > 0 \text{ dans } G \\ f_{xx} \text{ et } g_{yy} \text{ existent}\}}} \inf_G \left( -\frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right);$$

mais les paires de fonctions plus particulières  $\{\hat{f}, \hat{g}\}$  sont « les meilleures ».

## § 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

Considérons de nouveau le principe de Rayleigh sous la forme (14); remarquons que la fonction propre  $u_1(x, y)$  n'est déterminée qu'à un facteur constant près, il en est donc de même de  $\text{grad } u_1$ ; tandis que le champ vectoriel  $\text{grad } u_1/u_1$  est uniquement déterminé. C'est pourquoi, opérant presque comme Friedrichs (cf. 1.2), nous remplaçons —  $\text{grad } v/v$  par  $\vec{q}$ , c'est-à-dire —  $\text{grad } v$  par  $v\vec{q}$  dans (14).  $\lambda_1 \geq \max k$  sous la condition

$$\forall_{\substack{\vec{q} \\ v=0 \text{ sur } \Gamma}} \iint_G [v^2 \vec{q}^2 - kv^2 - 2v\vec{p} \cdot (\text{grad } v + v\vec{q})] dA \geq 0,$$

quel que soit le champ  $\vec{p}$  (« multiplicateur de Lagrange »); en effet, si l'on restreint la paire  $\{\nu, \vec{q}\}$  par  $\vec{q} = -\text{grad } \nu/\nu$ , on retrouve la condition (14).

Gardons  $\vec{p}$  fixe et cherchons à minimaliser l'intégrale en variant  $\nu$  et  $\vec{q}$ ; nous obtenons les deux équations d'Euler suivantes pour un champ « extrémal »  $\hat{\vec{q}}$ :

$$0 = v^2 \hat{\vec{q}} - v^2 \vec{p}, \quad \text{d'où} \quad \hat{\vec{q}} = \vec{p};$$

$$0 = v \hat{\vec{q}}^2 - kv - 2\vec{p} \cdot \hat{\vec{q}} v - \vec{p} \cdot \text{grad } v + \text{div}(v\vec{p}) = v \cdot (\text{div } \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 - k);$$

donc

$$(15') \quad \text{div } \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 = k;$$

$\nu$  quelconque,  $= 0$  sur  $\Gamma$ .

Si nous avons construit un tel champ vectoriel  $\hat{\vec{q}}$  dans  $G$ ,  $\nu$  et  $\hat{\vec{q}}$  satisferont les équations d'Euler correspondant au choix  $\vec{p} = \hat{\vec{q}}$ . L'intégrale devient alors, pour  $\nu$  et  $\hat{\vec{q}}$  quelconques,

$$(16') \quad \iint_G [(\vec{q}^2 - 2\vec{q} \cdot \hat{\vec{q}} - k)v^2 - \hat{\vec{q}} \cdot \text{grad}(v^2)] dA \\ = \iint_G [(\vec{q} - \hat{\vec{q}})^2 + \text{div } \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 - k] v^2 dA \geq 0,$$

donc  $\lambda_1 \geq k$ ; on a l'égalité en choisissant  $\hat{\vec{q}} = -\text{grad } u_1/u_1$ , d'où

$$(17') \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\vec{q}; \text{div } \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 = \text{const}} (\text{div } \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum (cf. [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4]):

$$(18') \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\vec{q}} \inf_G (\text{div } \vec{q} - \vec{q}^2);$$

nous voyons en effet que l'inégalité (16') reste satisfaite pourvu que  $\text{div } \hat{\vec{q}} - \hat{\vec{q}}^2 - k \geq 0$  dans tout  $G$ .

*Remarques.* — (a) Le principe (18') est essentiellement équivalent à (18): considérer le champ  $\vec{q} = (-f_x/f, -g_y/g)$ .

(b) Il n'y a pas lieu d'exiger la continuité des champs  $\vec{q}$  ou  $\hat{\vec{q}}$ : il suffit que  $q_1$  soit continue en  $x$ ,  $q_2$  continue en  $y$ , et que les dérivées partielles  $q_{1x}$  et  $q_{2y}$  existent; la même remarque s'applique aux champs  $\vec{p}$  concurrents pour le principe de Thomson.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. BOGGIO, Sull'equazione del moto vibratorio delle membrane elastiche. *Atti Accad. Lincei*, ser. 5, 16 (2° sem.), 1907, pp. 386-393.
- [2] R. COURANT & D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, vol. 1 (Springer, Berlin, 1931).
- [3] J. B. DIAZ, Upper and lower bounds for quadratic functionals. *Seminario matemático de Barcelona*, *Collectanea Math.*, 4, 1951, pp. 1-50.
- [4] G. FICHERA & M. PICONE, Calcolo per difetto del più basso autovalore di un operatore ellittico del secondo ordine. *Atti Accad. Lincei*, *Rend.*, ser. 8, 30, 1961, pp. 411-418.
- [5] K. O. FRIEDRICHS, Ein Verfahren der Variationsrechnung, das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdrucks darzustellen. *Nachrichten Göttingen*, 1929, pp. 13-20.
- [6] J. HERSCH, Un principe de maximum pour la fréquence fondamentale d'une membrane. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 249, 1959, p. 1074.
- [7] — Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principe de maximum. *ZAMP*, 11, 1960, pp. 387-413.
- [8] — Le principe de Thomson comme corollaire de celui de Dirichlet. *L'Enseignement math.*, 2<sup>e</sup> série, 6, 1960, p. 152.
- [9] — Physical interpretation and strengthening of M. H. Protter's method for vibrating nonhomogeneous membranes; its analogue for Schrödinger's equation. *Pacific J. Math.*, 11, 1961, pp. 971-980.
- [10] W. W. HOOKER, *Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations of orders two and four*. Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1960.
- [11] L. E. PAYNE & H. F. WEINBERGER, Lower bounds for vibration frequencies of elastically supported membranes and plates. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 5, 1957, pp. 171-182.
- [12] E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 2 (1<sup>re</sup> éd.: 1893), pp. 25-26.
- [13] G. PÓLYA & G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton University Press, 1951.
- [14] M. H. PROTTER, Vibration of a nonhomogeneous membrane. *Pacific J. Math.*, 9, 1959, pp. 1249-55.
- [15] — Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations. *Ann. of Math.*, 71, 1960, pp. 423-444.

*Remarque finale.* — Il y a lieu d'indiquer également les travaux de M. G. SLOBODIANSKI, très proches à la fois de la transformation de Friedrichs et de celle que nous décrivons ici: voir à ce sujet le livre de S. G. MICHLIN: *Variationsmethoden der mathematischen Physik* (Akademie-Verlag, Berlin, 1962), pp. 300 ss.

(reçu le 15 mars 1964)

Prof. J. Hersch  
E.P.F.  
Zürich