Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS VARIABLES

Autor: Badesco, Radu / Dumitresco, Eugeniu / Saulesco, Constantin

Kapitel: 9. Exemples.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39970

On obtient ainsi les relations

$$\int_0^1 g(t) \cdot t^{n+p-j} \left[\frac{W_{p-1}^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right]^{(p-1-j)} \cdot \quad dt = (-1)^n \frac{(p-1-j)!}{n!} f_0^{(j)}(0)$$

$$(j = 0\,,\, 1\,,\, \dots\,,\, p-1)\,, \qquad (33)$$

qui conduisent aux valeurs cherchées des coefficients de $W_{p-1}(x)$, valeurs qu'il est inutile de transcrire ici.

Remarquons pour clôre cette synthétique exposition que l'on peut remplacer l'intervalle $[o, x]$ par un intervalle quelconque $[a, x]$ avec la même caractéristique — $P_n(x)$ n'a aucune racine c dans cet intervalle — Il suffit pour cela d'introduire les développements de $P_n(x)$, $W_{p-1}(x)$ et $f_0(x)$ suivant les puissances positives de $(x-a)$. Une fois effectué ce changement, l'intégrale de (29), étendue à l'intervalle $[a, x]$, ne figurera pas dans la résolution du problème de Cauchy

$$x = x_0\,,\; y = y_0\,,\; y' = y_0'\,,\; \dots\,,\; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

si l'on prend $x_0 = a$, et l'on aura un système linéaire qui permettra de déterminer les divers coefficients de $Q_{n+p-1}(x)$.

9. Exemples.

Un exemple simple pour l'équation (3) est constitué par l'équation

$$\frac{x^2 - 1}{2} y'' - xy' + y = f(x)$$

dont la solution générale s'écrit

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \int_a^x (x-t)^2 \frac{f'(t)}{t^2 - 1} dt + f(a)$$

ou bien sous la forme (18)

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \left[\frac{1}{2} - \frac{(x-a)^2}{a^2-1} \right] . f(a)$$

$$+ 2 \int_a^x (x-t) \frac{tx - 1}{(t^2-1)^2} f(t) \,.\, dt$$

avec la condition $a^2 \neq 1$ si $f(a) \neq 0$.

La solution du problème de Cauchy ($x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$) peut être facilement déduite de cette dernière expression en prenant $a = x_0 \neq \pm 1$.

Un autre exemple est constitué par l'équation hypergéométrique du type (20)

$$(x-x^2)\,y'' - p(1-2x)\,y' - p(p+1)\,y = f_0(x) \qquad (34)$$

où $\alpha = \gamma = -p$, $\beta = -(p+1)$, *dont la solution classique ne peut être mise sous la forme connue représentée par une intégrale*, β étant un entier négatif. La solution (23) de l'équation homogène (20), dont les coefficients vérifient les conditions (24) qui prennent une forme simple

$$(j+1)\,q_{j+1} + (p+1-j)\,q_j = 0 \qquad (j=0\,,\,1\,,\,\dots\,,\,p-1)$$

s'écrit en fonction des constantes arbitraires C_1 et C_2

$$y_0 = C_1 x^{p+1} + C_2 \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\, C_{p+1}^i\, x^i\,. \qquad (35')$$

Cette solution a la forme plus simple

$$y_0 = \int_0^1 h(u)\,\frac{(x-u)^{p+1}}{(p+1)!}\,du \qquad (35)$$

avec les conditions

$$\int_0^1 h(u)\,du = A_1\,,\ \int_0^1 h(u)\,u^i du = A_2\,,\ (i=1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,p+1)$$

A_1 et A_2 étant des constantes arbitraires.

La solution générale de l'équation non-homogène (20) sera alors

$$y = y_0 + \frac{1}{(p+1)!}\int_a^x (x-t)^{p+1}\,\frac{f_0^{(p)}(t)}{t - t^2}\,dt + \sum_{i=0}^{p-1} w_i x^i \ \ (a \neq 0\,;\ 1) \qquad (36)$$

où

$$w_i = \frac{1}{(p-i+1)!\,i!}\sum_{j=i}^{p-1} (-1)^{j-i+1}\,(p-j-1)!\,.\,f_0^{(j)}(0)\,,$$

expression qui peut être facilement écrite sous une forme plus restreinte.

La vérification de (35′) est immédiate puisque $y_1 = x^{p+1}$ et $y_2 = (1-x)^{p+1}$ sont des solutions particulières connues de l'équation homogène (34). Il en est de même de (36) qui peut être dérivée $(p+2)$ fois dans les hypothèses faites.

Résumé

Les auteurs étudient une équation différentielle linéaire du n-ième ordre (3), à coefficients polynomes de la classe Appell, dont la résolution peut se faire par une voie élémentaire et qui assure une unité d'exposition au chapitre des équations différentielles du cours classique d'Analyse. Il est à remarquer que l'équation (3) a la même généralité que les équations à coefficients constants ou du type d'Euler sur lesquelles elle a l'avantage de ne pas introduire une équation algébrique caractéristique, les fonctions fondamentales étant immédiatement mises en évidence. Une extension de (3) a conduit M. C. Săulesco aux équations (20) ou (22) qui dépendent d'un paramètre entier $p > 0$, et l'exemple de l'équation hypergéométrique (24) permet la vérification directe des résultats exposés d'une manière trop succincte.

(reçu le 1er avril 1964)

Institut Polytechnique
C. Dorobanti 232
Bucarest (3)