8. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION NON-HOMOGÈNE (20).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

d'où les p conditions mentionnées

$$\int_0^1 g(t) \,.\, t^{n+p-j} \left[\frac{y_0^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right]^{(p-j-1)} . \quad dt = 0 ,$$

$$(j = 0, 1, \ldots, p-1) . \tag{26}$$

Si nous prenons le polynome y_0 sous la forme

$$y_0 = \int_0^1 h(u) \frac{(x-u)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} du \tag{27}$$

avec $h(u)$ arbitraire, mais intégrable sur [0, 1], les conditions (26) s'écrivent

$$\int_0^1 \int_0^1 g(t) \,.\, h(u) \,.\, (t-u)^n \,.\, u^{p-j-1} \,.\, dt \,.\, du = 0 , \; (j=0, 1, \ldots, p-1) \tag{28}$$

qu'on peut aussi déduire directement de (24).

8. Résolution de l'équation non-homogène (20).

Une solution Y de l'équation non-homogène (19) est

$$Y = \frac{1}{(n+p-1)!} \int_0^x (x-t)^{n+p-1} . \frac{f_0^{(p)}(t)}{P_n(t)} dt \tag{29}$$

dans l'hypothèse $P_n(0) \neq 0$ et comme elle satisfait aux conditions de Cauchy

$$Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n+p-1)}(0) = 0 \tag{30}$$

on peut chercher une solution particulière Y_p de (20) qui soit de la forme

$$Y_p = Y + W_{p-1}(x) \tag{31}$$

où $W_{p-1}(x)$ est un polynome du $(p-1)$ème degré en x. Si l'on suppose $f_0(x)$ de la classe $C^p[0, b]$ — l'intervalle $[0, b]$ ne contenant aucune racine de $P_n(x)$ — les coefficients de $W_{p-1}(x)$ pourront être déterminés par une identification

$$T_p[W_{p-1}(x)] = \sum_{i=0}^{p-1} f_0^{(i)}(0) \frac{x^i}{i!} . \tag{32}$$

On obtient ainsi les relations

$$\int_0^1 g(t) \,.\, t^{n+p-j} \left[\frac{W_{p-1}^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right]^{(p-1-j)} . \; dt = (-1)^n \frac{(p-1-j)!}{n!} f_0^{(j)}(0)$$

$$(j = 0, 1, \ldots, p-1), \tag{33}$$

qui conduisent aux valeurs cherchées des coefficients de $W_{p-1}(x)$, valeurs qu'il est inutile de transcrire ici.

Remarquons pour clôre cette synthétique exposition que l'on peut remplacer l'intervalle $[o, x]$ par un intervalle quelconque $[a, x]$ avec la même caractéristique — $P_n(x)$ n'a aucune racine c dans cet intervalle — Il suffit pour cela d'introduire les développements de $P_n(x)$, $W_{p-1}(x)$ et $f_0(x)$ suivant les puissances positives de $(x-a)$. Une fois effectué ce changement, l'intégrale de (29), étendue à l'intervalle $[a, x]$, ne figurera pas dans la résolution du problème de Cauchy

$$x = x_0 \,,\; y = y_0 \,,\; y' = y_0' \,,\; \ldots \,,\; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

si l'on prend $x_0 = a$, et l'on aura un système linéaire qui permettra de déterminer les divers coefficients de $Q_{n+p-1}(x)$.

9. Exemples.

Un exemple simple pour l'équation (3) est constitué par l'équation

$$\frac{x^2-1}{2} y'' - xy' + y = f(x)$$

dont la solution générale s'écrit

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \int_a^x (x-t)^2 \frac{f'(t)}{t^2-1} dt + f(a)$$

ou bien sous la forme (18)

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \left[\frac{1}{2} - \frac{(x-a)^2}{a^2-1} \right] . f(a)$$

$$+ 2 \int_a^x (x-t) \frac{tx-1}{(t^2-1)^2} f(t) \,.\, dt$$

avec la condition $a^2 \neq 1$ si $f(a) \neq 0$.