Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS VARIABLES

Autor: Badesco, Radu / Dumitresco, Eugeniu / Saulesco, Constantin

Kapitel: 8. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION NON-HOMOGÈNE (20).

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39970

d'où les p conditions mentionnées

$$\int_0^1 g(t) \,.\, t^{n+p-j} \left[\frac{y_0^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right]^{(p-j-1)} . \quad dt = 0 \,,$$

$$(j = 0, 1, \ldots, p-1) \,. \tag{26}$$

Si nous prenons le polynome y_0 sous la forme

$$y_0 = \int_0^1 h(u) \frac{(x-u)^{n+p-1}}{(n+p-1)\,!} du \tag{27}$$

avec $h(u)$ arbitraire, mais intégrable sur [0, 1], les conditions (26) s'écrivent

$$\int_0^1 \int_0^1 g(t) \,.\, h(u) \,.\, (t-u)^n \,.\, u^{p-j-1} \,.\, dt \,.\, du = 0 \,, \, (j=0 \,, 1 \,, \ldots \,, p-1) \tag{28}$$

qu'on peut aussi déduire directement de (24).

8. Résolution de l'équation non-homogène (20).

Une solution Y de l'équation non-homogène (19) est

$$Y = \frac{1}{(n+p-1)\,!} \int_0^x (x-t)^{n+p-1} \,.\, \frac{f_0^{(p)}(t)}{P_n(t)} dt \tag{29}$$

dans l'hypothèse $P_n(0) \neq 0$ et comme elle satisfait aux conditions de Cauchy

$$Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n+p-1)}(0) = 0 \tag{30}$$

on peut chercher une solution particulière Y_p de (20) qui soit de la forme

$$Y_p = Y + W_{p-1}(x) \tag{31}$$

où $W_{p-1}(x)$ est un polynome du $(p-1)$ème degré en x. Si l'on suppose $f_0(x)$ de la classe $C^p\,[0, b]$ — l'intervalle $[0, b]$ ne contenant aucune racine de $P_n(x)$ — les coefficients de $W_{p-1}(x)$ pourront être déterminés par une identification

$$T_p\left[W_{p-1}(x)\right] = \sum_{i=0}^{p-1} f_0^{(i)}(0) \frac{x^i}{i\,!} \,. \tag{32}$$

On obtient ainsi les relations

$$\int_0^1 g(t) \cdot t^{n+p-j} \left[\frac{W_{p-1}^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right]^{(p-1-j)} \cdot \quad dt = (-1)^n \frac{(p-1-j)!}{n!} f_0^{(j)}(0)$$

$$(j=0, 1, \ldots, p-1), \qquad (33)$$

qui conduisent aux valeurs cherchées des coefficients de $W_{p-1}(x)$, valeurs qu'il est inutile de transcrire ici.

Remarquons pour clôre cette synthétique exposition que l'on peut remplacer l'intervalle $[o, x]$ par un intervalle quelconque $[a, x]$ avec la même caractéristique — $P_n(x)$ n'a aucune racine c dans cet intervalle — Il suffit pour cela d'introduire les développements de $P_n(x)$, $W_{p-1}(x)$ et $f_0(x)$ suivant les puissances positives de $(x-a)$. Une fois effectué ce changement, l'intégrale de (29), étendue à l'intervalle $[a, x]$, ne figurera pas dans la résolution du problème de Cauchy

$$x = x_0, \; y = y_0, \; y' = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

si l'on prend $x_0 = a$, et l'on aura un système linéaire qui permettra de déterminer les divers coefficients de $Q_{n+p-1}(x)$.

9. Exemples.

Un exemple simple pour l'équation (3) est constitué par l'équation

$$\frac{x^2 - 1}{2} y'' - xy' + y = f(x)$$

dont la solution générale s'écrit

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \int_a^x (x-t)^2 \frac{f'(t)}{t^2 - 1} dt + f(a)$$

ou bien sous la forme (18)

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \left[\frac{1}{2} - \frac{(x-a)^2}{a^2-1} \right] . f(a)$$

$$+ 2 \int_a^x (x-t) \frac{tx - 1}{(t^2-1)^2} f(t) \,.\, dt$$

avec la condition $a^2 \neq 1$ si $f(a) \neq 0$.