Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS VARIABLES

Autor: Badesco, Radu / Dumitresco, Eugeniu / Saulesco, Constantin

Kapitel: 7. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE $T_p(y) = 0$.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39970

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(p+i-1)!}{(n-i)!\,i!} P_{n-i}(x) \,.\, y^{(n-i)}(x) = f(x) \qquad (22)$$

où

$$f(x) = \frac{(p-1)!}{n!} f_0(x) \,.$$

Nous donnerons ici seulement les résultats obtenus par M. Săulesco qui peuvent être établis d'une manière analogue au cas traité dans cet article pour l'équation (3).

7. Résolution de l'équation homogène $T_p(y) = 0$.

La solution y_0 de l'équation homogène (19) [$f_0(x) \equiv 0$],

$$y_0 = Q_{n+p-1}(x) = \sum_{j=0}^{n+p-1} q_j x^j \qquad (23)$$

qui dépend des $p+n$ constantes arbitraires q_j, ne peut vérifier l'équation homogène correspondante $T_p(y) = 0$ que si l'on introduit p conditions supplémentaires entre ces constantes. Intégrant p fois cette dernière équation, apparaît un polynome du $(p-1)$-ème degré et son identification à zéro donne les p conditions cherchées portant sur les coefficients de $P_n(x)$ [introduits par (8)], et sur ceux de y_0

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i+j)!\,(p+i-j-1)!\, a_{n-i}\, q_{n+j-i} = 0$$
$$(j=0,\, 1,\, \ldots,\, p-1)\,. \qquad (24)$$

Ces conditions peuvent être mises par une autre voie sous une forme plus restreinte dans laquelle figure la fonction connue $g(t)$ de (8). Observons pour cela que l'opérateur $T_p(y_0)$ peut s'écrire, tenant compte de (8) et exprimant le polynome y_0 par son développement taylorien en $(x-t)$,

$$T_p(y_0) = (-1)^n \frac{n!}{(p-1)!} \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^j x^j \int_0^1 g(t)\,.\,t^{n+p-j} \left[\frac{y_0^{(j)}(t)}{t^{n+1}}\right]^{(p-j-1)} dt$$
$$(25)$$

d'où les p conditions mentionnées

$$\int_0^1 g(t) \, . \, t^{n+p-j} \left[\frac{y_0^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right]^{(p-j-1)} . \quad dt = 0 \, ,$$

$$(j = 0, 1, \ldots, p-1) \, . \tag{26}$$

Si nous prenons le polynome y_0 sous la forme

$$y_0 = \int_0^1 h(u) \frac{(x-u)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} du \tag{27}$$

avec $h(u)$ arbitraire, mais intégrable sur [0, 1], les conditions (26) s'écrivent

$$\int_0^1 \int_0^1 g(t) \, . \, h(u) \, . \, (t-u)^n \, . \, u^{p-j-1} \, . \, dt \, . \, du = 0 \, , \, (j=0, 1, \ldots, p-1) \tag{28}$$

qu'on peut aussi déduire directement de (24).

8. Résolution de l'équation non-homogène (20).

Une solution Y de l'équation non-homogène (19) est

$$Y = \frac{1}{(n+p-1)!} \int_0^x (x-t)^{n+p-1} \, . \, \frac{f_0^{(p)}(t)}{P_n(t)} dt \tag{29}$$

dans l'hypothèse $P_n(0) \neq 0$ et comme elle satisfait aux conditions de Cauchy

$$Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n+p-1)}(0) = 0 \tag{30}$$

on peut chercher une solution particulière Y_p de (20) qui soit de la forme

$$Y_p = Y + W_{p-1}(x) \tag{31}$$

où $W_{p-1}(x)$ est un polynome du $(p-1)$ème degré en x. Si l'on suppose $f_0(x)$ de la classe $C^p\,[0, b]$ — l'intervalle $[0, b]$ ne contenant aucune racine de $P_n(x)$ — les coefficients de $W_{p-1}(x)$ pourront être déterminés par une identification

$$T_p [W_{p-1}(x)] = \sum_{i=0}^{p-1} f_0^{(i)}(0) \frac{x^i}{i!} \, . \tag{32}$$