Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS VARIABLES

Autor: Badesco, Radu / Dumitresco, Eugeniu / Saulesco, Constantin

Kapitel: 6. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39970

e) La solution (17) existe aussi pour $a = c$, racine de $P_n(x)$, (d'ordre de multiplicité m) si la fonction $f(x)$ admet une dérivée au voisinage de c où celle-ci se présente sous la forme

$$f'(x) = (x-c)^q f_1(x)$$

avec $f_1(c) \neq 0, \infty$ et $q \geqq m$, car c est une singularité apparente pour $\frac{f'(t)}{P_n(t)}$. Le cas $m-1<q<m$ conduit à des intégrales généralisées, les solutions effectives de (3) étant données par (17) (pour $a = c$), et seulement le cas $q \leqq m-1$ est à rejeter une fois que les intégrales correspondantes de (17) sont divergentes au voisinage de c.

6. Généralisation de la méthode.

Le problème étudié s'étend d'une manière naturelle au cas des équations (3) qui peuvent être réduites par p dérivations à l'équation

$$Y^{(n+p)} = \frac{f_0^{(p)}(x)}{P_n(x)} \tag{19}$$

M. Const. Săulesco, étudiant III^e année, s'est proposé de trouver ces équations et a montré qu'elles se présentaient sous la forme

$$T_p(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_{p+i-1}^{p-1} P_n^{(i)}(x)\, y^{(n-i)}(x) = f_0(x) \tag{20}$$

où $P_n(x)$ est un polynome arbitraire du n-ième degré et C_a^b le nombre des combinaisons b à b de a objets. Une suite de p intégrations permet immédiatement d'effectuer le passage de (19) à (20), ce qui constitue une vérification directe.

Par l'introduction des polynomes de la classe Appell $P_n(x)$, ($n = 0, 1, \dots$), qui satisfont aux relations

$$P_n^{(i)}(x) = n(n-1)\dots(n-i+1)P_{n-i}(x), \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{21}$$

l'équation (20) prend la forme généralisant (3)

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(p+i-1)!}{(n-i)!\,i!} P_{n-i}(x) \,.\, y^{(n-i)}(x) = f(x) \qquad (22)$$

où

$$f(x) = \frac{(p-1)!}{n!} f_0(x) \,.$$

Nous donnerons ici seulement les résultats obtenus par M. Săulesco qui peuvent être établis d'une manière analogue au cas traité dans cet article pour l'équation (3).

7. Résolution de l'équation homogène $T_p(y) = 0$.

La solution y_0 de l'équation homogène (19) [$f_0(x) \equiv 0$],

$$y_0 = Q_{n+p-1}(x) = \sum_{j=0}^{n+p-1} q_j x^j \qquad (23)$$

qui dépend des $p+n$ constantes arbitraires q_j, ne peut vérifier l'équation homogène correspondante $T_p(y) = 0$ que si l'on introduit p conditions supplémentaires entre ces constantes. Intégrant p fois cette dernière équation, apparaît un polynome du $(p-1)$-ème degré et son identification à zéro donne les p conditions cherchées portant sur les coefficients de $P_n(x)$ [introduits par (8)], et sur ceux de y_0

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i+j)!\,(p+i-j-1)!\, a_{n-i}\, q_{n+j-i} = 0$$
$$(j=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1)\,. \qquad (24)$$

Ces conditions peuvent être mises par une autre voie sous une forme plus restreinte dans laquelle figure la fonction connue $g(t)$ de (8). Observons pour cela que l'opérateur $T_p(y_0)$ peut s'écrire, tenant compte de (8) et exprimant le polynome y_0 par son développement taylorien en $(x-t)$,

$$T_p(y_0) = (-1)^n \frac{n!}{(p-1)!} \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^{j} x^j \int_0^1 g(t) \,.\, t^{n+p-j} \left[\frac{y_0^{(j)}(t)}{t^{n+1}}\right]^{(p-j-1)} dt \qquad (25)$$