

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | L'Enseignement Mathématique   |
| <b>Herausgeber:</b> | Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique                              |
| <b>Band:</b>        | 11 (1965)   |
| <b>Heft:</b>        | 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  |
| <br>                |   |
| <b>Artikel:</b>     | SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS VARIABLES                     |
| <b>Autor:</b>       | Badesco, Radu / Dumitresco, Eugeniu / Saulesco, Constantin                            |
| <b>Kapitel:</b>     | 4. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION NON-HOMOGÈNE $T(y) = f(x)$                                |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-39970">https://doi.org/10.5169/seals-39970</a> |

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE $T(y) = o$ .

Considérons l'équation homogène  $T(y) = o$  et écrivons que le polynôme arbitraire  $y_0 = Q_n(x)$  vérifie cette équation. Nous aurons, utilisant la représentation (8) des  $P_m(x)$ ,

$$T(y_0) = \int_0^1 g(t) \sum_{i=0}^n \frac{(t-x)^i}{i!} y_0^{(i)}(x) dt \equiv 0$$

et comme la somme n'est autre que le développement taylorien de  $y_0(t)$  au voisinage de  $t = x$ , cette condition, *indépendante de x*, devient

$$\int_0^1 g(t) y_0(t) dt = 0 \quad (13)$$

ou bien, tenant compte de (12) et de (9),

$$\sum_{i=0}^n C_i \gamma_{n-i} = 0, \quad (\gamma_0 \neq 0). \quad (14)$$

*Le coefficient  $C_n$  s'exprime donc linéairement en fonction des n coefficients arbitraires  $C_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).*

### 4. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION NON-HOMOGÈNE $T(y) = f(x)$

Passons à l'équation non-homogène (3) et observons qu'elle peut être obtenue en intégrant l'équation (10) multipliée par  $\frac{P_n(x)}{n!}$ , de sorte que nous pourrons écrire pour la solution particulière  $Y(x)$  donnée par (11) [où l'on pose  $Q_n(x) \equiv 0$ ]

$$T(Y) = f(x) - f(a) \quad (15)$$

La constante d'intégration doit être égale à  $-f(a)$  car, d'après les conditions (6), l'expression  $T(Y)$  s'annule pour  $x = a$ .

Ceci précisé, cherchons une solution particulière  $Y_p(x)$  de (3) qui soit de la forme  $Y_p = Y + h$ , avec  $h$  constante. Nous aurons, grâce à la linéarité de  $T(y)$ ,

$$T(Y+h) = T(Y) + T(h) = f(x)$$

ou bien, d'après (13) et observant que  $T(h) = (-1)^n h \cdot P_0$ ,

$$h = (-1)^n \frac{f(a)}{P_0}. \quad (16)$$

La solution générale cherchée sera alors

$$y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{P_n(t)} dt + (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \quad (17)$$

ou bien, en intégrant par parties et tenant compte de (14) pour éliminer  $C_n$ , elle aura l'expression

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i [x^{n-i} - (-1)^{n-i} P_{n-i}(0)] + \left[ \frac{(-1)^n}{P_0} - \frac{(x-a)^n}{P_n(a)} \right] f(a) \\ &\quad + n \int_a^x (x-t)^{n-1} \frac{P_n(t) + (x-t) P_{n-1}(t)}{P_n^2(t)} f(t) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

## 5. OBSERVATIONS.

a) Sous la forme (17), la résolution de (3) nécessite l'existence et l'intégrabilité de la dérivée  $f'(x)$ , tandis que *la forme (18) ne suppose que l'intégrabilité de  $f(x)$* .

b) L'expression (18) met en évidence  $n$  fonctions fondamentales de (3) — les polynomes qui multiplient les constantes arbitraires  $C_i$ . *Elles ont été déterminées sans résoudre aucune équation algébrique caractéristique*, propriété qui constitue un avantage d'ordre pédagogique sur les équations linéaires à coefficients constants ou sur les équations d'Euler.

c) *La solution générale (18) de l'équation (3) appartient à la classe  $C^n[a, b]$  si la fonction connue  $f(x)$  est bornée et intégrable sur tout intervalle  $[a, b]$  de l'axe Ox, où a et b sont compris entre deux racines consécutives réelles de l'équation  $P_n(x) = 0$ .*

d) Si  $c$  est une racine réelle de cette équation  $P_n(x) = 0$ , la droite  $x-c = 0$  est encore une intégrale car le long de cette droite  $dx = 0$ .