Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS VARIABLES

Autor: Badesco, Radu / Dumitresco, Eugeniu / Saulesco, Constantin

Kapitel: 4. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION NON-HOMOGÈNE T(y) = f(x)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39970

3. Résolution de l'équation homogène $T(y) = o$.

Considérons l'équation homogène $T(y) = o$ et écrivons que le polynome arbitraire $y_0 = Q_n(x)$ vérifie cette équation. Nous aurons, utilisant la représentation (8) des $P_m(x)$,

$$T(y_0) = \int_0^1 g(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{(t-x)^i}{i!} y_0^{(i)}(x)\, dt \equiv 0$$

et comme la somme n'est autre que le développement taylorien de $y_0(t)$ au voisinage de $t = x$, cette condition, *indépendante de x*, devient

$$\int_0^1 g(t)\, y_0(t)\, dt = 0 \tag{13}$$

ou bien, tenant compte de (12) et de (9),

$$\sum_{i=0}^{n} C_i \gamma_{n-i} = 0\,, \quad (\gamma_0 \neq 0)\,. \tag{14}$$

Le coefficient C_n s'exprime donc linéairement en fonction des n *coefficients arbitraires C_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$).*

4. Résolution de l'équation non-homogène $T(y) = f(x)$

Passons à l'équation non-homogène (3) et observons qu'elle peut être obtenue en intégrant l'équation (10) multipliée par $\dfrac{P_n(x)}{n!}$, de sorte que nous pourrons écrire pour la solution particulière $Y(x)$ donnée par (11) [où l'on pose $Q_n(x) \equiv 0$]

$$T(Y) = f(x) - f(a) \tag{15}$$

La constante d'intégration doit être égale à $-f(a)$ car, d'après les conditions (6), l'expression $T(Y)$ s'annule pour $x = a$.

Ceci précisé, cherchons une solution particulière $Y_p(x)$ de (3) qui soit de la forme $Y_p = Y + h$, avec h constante. Nous aurons, grâce à la linéarité de $T(y)$,

$$T(Y+h) = T(Y) + T(h) = f(x)$$

ou bien, d'après (13) et observant que $T(h) = (-1)^n h.P_0$,

$$h = (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \tag{16}$$

La solution générale cherchée sera alors

$$y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{P_n(t)}\,dt + (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \tag{17}$$

ou bien, en intégrant par parties et tenant compte de (14) pour éliminer C_n, elle aura l'expression

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} C_i\left[x^{n-i} - (-1)^{n-i} P_{n-i}(0)\right] + \left[\frac{(-1)^n}{P_0} - \frac{(x-a)^n}{P_n(a)}\right] f(a)$$
$$+ n \int_a^x (x-t)^{n-1} \frac{P_n(t) + (x-t)P_{n-1}(t)}{P_n^2(t)} f(t)\,dt\,. \tag{18}$$

5. Observations.

a) Sous la forme (17), la résolution de (3) nécessite l'existence et l'intégrabilité de la dérivée $f'(x)$, tandis que *la forme (18) ne suppose que l'intégrabilité de* $f(x)$.

b) L'expression (18) met en évidence n fonctions fondamentales de (3) — les polynomes qui multiplient les constantes arbitraires C_i. *Elles ont été déterminées sans résoudre aucune équation algébrique caractéristique*, propriété qui constitue un avantage d'ordre pédagogique sur les équations linéaires à coefficients constants ou sur les équations d'Euler.

c) *La solution générale (18) de l'équation (3) appartient à la classe* $C^n[a, b]$ *si la fonction connue* f (x) *est bornée et intégrable sur tout intervalle* [a, b] *de l'axe* Ox, *où* a *et* b *sont compris entre deux racines consécutives réelles de l'équation* $\mathrm{P}_n(x) = 0$.

d) Si c est une racine réelle de cette équation $P_n(x) = 0$, la droite $x - c = 0$ est encore une intégrale car le long de cette droite $dx = 0$.