2. Equations différentielles du n-ième ordre.

Nous présenterons ici l'équation d'Euler

$$T(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{x^i y^{(i)}}{i!} = f(x) \qquad (1)$$

qui admet un système simple de fonctions fondamentales

$$x, x^2, \ldots, x^n \qquad (2)$$

et ensuite l'équation à coefficients variables $P_n(x)$, polynomes de la classe Appell de degrés égaux aux indices,

$$T(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{P_i(x)\, y^{(i)}}{i!} = f(x) \qquad (3)$$

L'étude de ces équations a la même généralité que les équations à coefficients constants du n-ième ordre — ou celles d'Euler du même ordre — et peut être faite en utilisant seulement les connaissances élémentaires acquises en première année, au cours d'Analyse. Remarquons que la méthode de résolution ne comporte au début qu'une seule dérivation de l'équation mais exige, quand on passe à l'équation non-homogène, la connaissance de la solution particulière

$$Y(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f(t)\, dt \qquad (4)$$

de l'équation

$$Y^{(n+1)} = f(x) \qquad (5)$$

répondant aux conditions de Cauchy

$$Y(a) = Y'(a) = \ldots = Y^{(n)}(a) = 0\,. \qquad (6)$$

Rappelons ensuite que les polynomes de la classe d'Appell sont caractérisés par les relations

$$\frac{dP_m(x)}{dx} = m.P_{m-1}(x)\,, \; (m \in N) \qquad (7)$$

et ont la représentation par intégrale

$$P_m(x) = \int_0^1 (x-t)^m g(t)\,dt = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} \tag{8}$$

où

$$a_i = (-1)^i C_m^i \int_0^1 t^i g(t)\,dt = (-1)^i C_m^i \gamma_i \tag{9}$$

$g(t)$ étant une fonction arbitraire, intégrable sur $[o, 1]$. On vérifie immédiatement la relation (7) en dérivant directement l'expression (8). Observons en plus que la suite $P_m(x) = x^m$ qui apparaît dans l'équation (1) appartient aussi à la classe d'Appell, de sorte que nous présenterons ici seulement la résolution de (3), celle de (1) pouvant être obtenue d'une manière analogue.

Dérivant l'équation (3), nous avons

$$\frac{d}{dx}[T(y)] = \frac{P_n(x)}{n!} y^{(n+1)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{P'_m(x) - mP_{m-1}(x)}{m!} y^{(m)} = f'(x)$$

et, d'après (7),

$$y^{(n+1)} = n! \frac{f'(x)}{P_n(x)} \tag{10}$$

équation qui admet la solution générale, obtenue en appliquant (4),

$$y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{P_n(t)} dt\,. \tag{11}$$

$Q_n(x)$ est ici un polynome de degré n à coefficients arbitraires

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i x^{n-i} \tag{12}$$

et a un nombre réel choisi de manière que l'intervalle $[a, x]$ ne contienne aucune racine du polynome $P_n(x)$.

La fonction (11), qui dépend linéairement de $(n+1)$ constantes arbitraires C_i, doit satisfaire aussi à l'équation (3) et cette condition nous permettra de déterminer l'une de ces constantes.