SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS VARIABLES

par Radu Badesco, Eugeniu Dumitresco, Constantin Saulesco

1. Considérations préliminaires.

Les cours classiques d'Analyse à l'usage des futurs physiciens ou ingénieurs présentent aujourd'hui d'une manière assez complète les équations différentielles linéaires. Après l'étude des équations linéaires à coefficients constants, qui peut être immédiatement généralisée au n-ième ordre, les propositions concernant l'opérateur différentiel linéaire $T(y)$, représenté par le premier membre de l'équation, s'étendent d'une manière naturelle au cas des coefficients variables. Comme première application, les équations du type d'Euler réductibles aux équations à coefficients constants.

La solution générale de toute équation différentielle appartenant à ces classes peut être écrite seulement si *l'on sait résoudre l'équation algébrique caractéristique du* n*-ième degré* attachée à cet opérateur et c'est là la première difficulté pédagogique à laquelle se heurte une présentation simple et unitaire du cours. Ensuite, l'extension de la théorie du wronskien à ces équations doit être faite sous un aspect purement théorique négligeant les applications dans le cas du n-ième ordre, car il n'y a pas dans la littérature connue aucune équation différentielle complète de cet ordre qui soit assez facilement maniable et d'un simple aspect.

C'est la lacune indiquée plus haut que nous voulons combler ici en signalant deux équations différentielles du n-ième ordre, résolubles par une même méthode, dont l'étude peut être faite par des moyens assez élémentaires.

2. Equations différentielles du n-ième ordre.

Nous présenterons ici l'équation d'Euler

$$T(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{x^i y^{(i)}}{i!} = f(x) \tag{1}$$

qui admet un système simple de fonctions fondamentales

$$x, x^2, \dots , x^n \tag{2}$$

et ensuite l'équation à coefficients variables $P_n(x)$, polynomes de la classe Appell de degrés égaux aux indices,

$$T(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{P_i(x)\, y^{(i)}}{i!} = f(x) \tag{3}$$

L'étude de ces équations a la même généralité que les équations à coefficients constants du n-ième ordre — ou celles d'Euler du même ordre — et peut être faite en utilisant seulement les connaissances élémentaires acquises en première année, au cours d'Analyse. Remarquons que la méthode de résolution ne comporte au début qu'une seule dérivation de l'équation mais exige, quand on passe à l'équation non-homogène, la connaissance de la solution particulière

$$Y(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f(t)\, dt \tag{4}$$

de l'équation

$$Y^{(n+1)} = f(x) \tag{5}$$

répondant aux conditions de Cauchy

$$Y(a) = Y'(a) = \dots = Y^{(n)}(a) = 0 . \tag{6}$$

Rappelons ensuite que les polynomes de la classe d'Appell sont caractérisés par les relations

$$\frac{dP_m(x)}{dx} = m.P_{m-1}(x)\,,\ (m \in N) \tag{7}$$

et ont la représentation par intégrale

$$P_m(x) = \int_0^1 (x-t)^m g(t)\,dt = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} \tag{8}$$

où

$$a_i = (-1)^i C_m^i \int_0^1 t^i g(t)\,dt = (-1)^i C_m^i \gamma_i \tag{9}$$

$g(t)$ étant une fonction arbitraire, intégrable sur $[o, 1]$. On vérifie immédiatement la relation (7) en dérivant directement l'expression (8). Observons en plus que la suite $P_m(x) = x^m$ qui apparaît dans l'équation (1) appartient aussi à la classe d'Appell, de sorte que nous présenterons ici seulement la résolution de (3), celle de (1) pouvant être obtenue d'une manière analogue.

Dérivant l'équation (3), nous avons

$$\frac{d}{dx}[T(y)] = \frac{P_n(x)}{n!} y^{(n+1)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{P'_m(x) - mP_{m-1}(x)}{m!} y^{(m)} = f'(x)$$

et, d'après (7),

$$y^{(n+1)} = n! \frac{f'(x)}{P_n(x)} \tag{10}$$

équation qui admet la solution générale, obtenue en appliquant (4),

$$y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{P_n(t)} dt\,. \tag{11}$$

$Q_n(x)$ est ici un polynome de degré n à coefficients arbitraires

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i x^{n-i} \tag{12}$$

et a un nombre réel choisi de manière que l'intervalle $[a, x]$ ne contienne aucune racine du polynome $P_n(x)$.

La fonction (11), qui dépend linéairement de $(n+1)$ constantes arbitraires C_i, doit satisfaire aussi à l'équation (3) et cette condition nous permettra de déterminer l'une de ces constantes.

3. Résolution de l'équation homogène $T(y) = o$.

Considérons l'équation homogène $T(y) = o$ et écrivons que le polynome arbitraire $y_0 = Q_n(x)$ vérifie cette équation. Nous aurons, utilisant la représentation (8) des $P_m(x)$,

$$T(y_0) = \int_0^1 g(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{(t-x)^i}{i!} y_0^{(i)}(x)\, dt \equiv 0$$

et comme la somme n'est autre que le développement taylorien de $y_0(t)$ au voisinage de $t = x$, cette condition, *indépendante de* x, devient

$$\int_0^1 g(t)\, y_0(t)\, dt = 0 \tag{13}$$

ou bien, tenant compte de (12) et de (9),

$$\sum_{i=0}^{n} C_i \gamma_{n-i} = 0\,, \quad (\gamma_0 \neq 0)\,. \tag{14}$$

Le coefficient C_n *s'exprime donc linéairement en fonction des* n *coefficients arbitraires* C_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.

4. Résolution de l'équation non-homogène $T(y) = f(x)$

Passons à l'équation non-homogène (3) et observons qu'elle peut être obtenue en intégrant l'équation (10) multipliée par $\dfrac{P_n(x)}{n!}$, de sorte que nous pourrons écrire pour la solution particulière $Y(x)$ donnée par (11) [où l'on pose $Q_n(x) \equiv 0$]

$$T(Y) = f(x) - f(a) \tag{15}$$

La constante d'intégration doit être égale à $-f(a)$ car, d'après les conditions (6), l'expression $T(Y)$ s'annule pour $x = a$.

Ceci précisé, cherchons une solution particulière $Y_p(x)$ de (3) qui soit de la forme $Y_p = Y+h$, avec h constante. Nous aurons, grâce à la linéarité de $T(y)$,

$$T(Y+h) = T(Y) + T(h) = f(x)$$

ou bien, d'après (13) et observant que $T(h) = (-1)^n h.P_0$,

$$h = (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \tag{16}$$

La solution générale cherchée sera alors

$$y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{P_n(t)}\, dt + (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \tag{17}$$

ou bien, en intégrant par parties et tenant compte de (14) pour éliminer C_n, elle aura l'expression

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \left[x^{n-i} - (-1)^{n-i} P_{n-i}(0)\right] + \left[\frac{(-1)^n}{P_0} - \frac{(x-a)^n}{P_n(a)}\right] f(a)$$
$$+ n \int_a^x (x-t)^{n-1} \frac{P_n(t) + (x-t)\, P_{n-1}(t)}{P_n^2(t)} f(t)\, dt\,. \tag{18}$$

5. Observations.

a) Sous la forme (17), la résolution de (3) nécessite l'existence et l'intégrabilité de la dérivée $f'(x)$, tandis que *la forme (18) ne suppose que l'intégrabilité de* $f(x)$.

b) L'expression (18) met en évidence n fonctions fondamentales de (3) — les polynomes qui multiplient les constantes arbitraires C_i. *Elles ont été déterminées sans résoudre aucune équation algébrique caractéristique*, propriété qui constitue un avantage d'ordre pédagogique sur les équations linéaires à coefficients constants ou sur les équations d'Euler.

c) *La solution générale (18) de l'équation (3) appartient à la classe* $C^n[a, b]$ *si la fonction connue* f (x) *est bornée et intégrable sur tout intervalle* [a, b] *de l'axe* Ox, *où* a *et* b *sont compris entre deux racines consécutives réelles de l'équation* $\mathrm{P}_n(x) = 0$.

d) Si c est une racine réelle de cette équation $P_n(x) = 0$, la droite $x - c = 0$ est encore une intégrale car le long de cette droite $dx = 0$.

e) La solution (17) existe aussi pour $a = c$, racine de $P_n(x)$, (d'ordre de multiplicité m) si la fonction $f(x)$ admet une dérivée au voisinage de c où celle-ci se présente sous la forme

$$f'(x) = (x-c)^q f_1(x)$$

avec $f_1(c) \neq 0, \infty$ et $q \geqq m$, car c est une singularité apparente pour $\frac{f'(t)}{P_n(t)}$. Le cas $m-1<q<m$ conduit à des intégrales généralisées, les solutions effectives de (3) étant données par (17) (pour $a = c$), et seulement le cas $q \leqq m-1$ est à rejeter une fois que les intégrales correspondantes de (17) sont divergentes au voisinage de c.

6. Généralisation de la méthode.

Le problème étudié s'étend d'une manière naturelle au cas des équations (3) qui peuvent être réduites par p dérivations à l'équation

$$Y^{(n+p)} = \frac{f_0^{(p)}(x)}{P_n(x)} \tag{19}$$

M. Const. Săulesco, étudiant IIIe année, s'est proposé de trouver ces équations et a montré qu'elles se présentaient sous la forme

$$T_p(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_{p+i-1}^{p-1} P_n^{(i)}(x)\, y^{(n-i)}(x) = f_0(x) \tag{20}$$

où $P_n(x)$ est un polynome arbitraire du n-ième degré et C_a^b le nombre des combinaisons b à b de a objets. Une suite de p intégrations permet immédiatement d'effectuer le passage de (19) à (20), ce qui constitue une vérification directe.

Par l'introduction des polynomes de la classe Appell $P_n(x)$, $(n = 0, 1, \dots)$, qui satisfont aux relations

$$P_n^{(i)}(x) = n(n-1)\dots(n-i+1)P_{n-i}(x), \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{21}$$

l'équation (20) prend la forme généralisant (3)

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(p+i-1)!}{(n-i)!\,i!} P_{n-i}(x) \,.\, y^{(n-i)}(x) = f(x) \qquad (22)$$

où

$$f(x) = \frac{(p-1)!}{n!} f_0(x)\,.$$

Nous donnerons ici seulement les résultats obtenus par M. Săulesco qui peuvent être établis d'une manière analogue au cas traité dans cet article pour l'équation (3).

7. Résolution de l'équation homogène $T_p(y) = 0$.

La solution y_0 de l'équation homogène (19) [$f_0(x) \equiv 0$],

$$y_0 = Q_{n+p-1}(x) = \sum_{j=0}^{n+p-1} q_j x^j \qquad (23)$$

qui dépend des $p+n$ constantes arbitraires q_j, ne peut vérifier l'équation homogène correspondante $T_p(y) = 0$ que si l'on introduit p conditions supplémentaires entre ces constantes. Intégrant p fois cette dernière équation, apparaît un polynome du $(p-1)$-ème degré et son identification à zéro donne les p conditions cherchées portant sur les coefficients de $P_n(x)$ [introduits par (8)], et sur ceux de y_0

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i+j)!\,(p+i-j-1)!\, a_{n-i}\, q_{n+j-i} = 0$$
$$(j=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1)\,. \qquad (24)$$

Ces conditions peuvent être mises par une autre voie sous une forme plus restreinte dans laquelle figure la fonction connue $g(t)$ de (8). Observons pour cela que l'opérateur $T_p(y_0)$ peut s'écrire, tenant compte de (8) et exprimant le polynome y_0 par son développement taylorien en $(x-t)$,

$$T_p(y_0) = (-1)^n \frac{n!}{(p-1)!} \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^{j} x^j \int_0^1 g(t)\,.\,t^{n+p-j} \left[\frac{y_0^{(j)}(t)}{t^{n+1}}\right]^{(p-j-1)} dt$$
$$(25)$$

d'où les p conditions mentionnées

$$\int_0^1 g(t) \, . \, t^{n+p-j} \left[\frac{y_0^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right]^{(p-j-1)} . \; dt = 0 \, ,$$

$$(j = 0 \, , 1 \, , \, ... \, , \, p-1) \, . \tag{26}$$

Si nous prenons le polynome y_0 sous la forme

$$y_0 = \int_0^1 h(u) \frac{(x-u)^{n+p-1}}{(n+p-1)\,!} du \tag{27}$$

avec $h(u)$ arbitraire, mais intégrable sur $[0, 1]$, les conditions (26) s'écrivent

$$\int_0^1 \int_0^1 g(t) \, . \, h(u) \, . \, (t-u)^n \, . \, u^{p-j-1} \, . \, dt \, . \, du = 0 \, , \, (j=0 \, , \, 1 \, , \, ... \, , \, p-1) \tag{28}$$

qu'on peut aussi déduire directement de (24).

8. Résolution de l'équation non-homogène (20).

Une solution Y de l'équation non-homogène (19) est

$$Y = \frac{1}{(n+p-1)\,!} \int_0^x (x-t)^{n+p-1} \, . \, \frac{f_0^{(p)}(t)}{P_n(t)} dt \tag{29}$$

dans l'hypothèse $P_n(0) \neq 0$ et comme elle satisfait aux conditions de Cauchy

$$Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n+p-1)}(0) = 0 \tag{30}$$

on peut chercher une solution particulière Y_p de (20) qui soit de la forme

$$Y_p = Y + W_{p-1}(x) \tag{31}$$

où $W_{p-1}(x)$ est un polynome du $(p-1)$ème degré en x. Si l'on suppose $f_0(x)$ de la classe $C^p\,[0, b]$ — l'intervalle $[0, b]$ ne contenant aucune racine de $P_n(x)$ — les coefficients de $W_{p-1}(x)$ pourront être déterminés par une identification

$$T_p\left[W_{p-1}(x)\right] = \sum_{i=0}^{p-1} f_0^{(i)}(0) \frac{x^i}{i\,!} \, . \tag{32}$$

On obtient ainsi les relations

$$\int_0^1 g(t) \, . \, t^{n+p-j} \left[\frac{W_{p-1}^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right]^{(p-1-j)} . \quad dt = (-1)^n \frac{(p-1-j)!}{n!} f_0^{(j)}(0)$$

$$(j=0, 1, \ldots, p-1), \qquad (33)$$

qui conduisent aux valeurs cherchées des coefficients de $W_{p-1}(x)$, valeurs qu'il est inutile de transcrire ici.

Remarquons pour clôre cette synthétique exposition que l'on peut remplacer l'intervalle $[o, x]$ par un intervalle quelconque $[a, x]$ avec la même caractéristique — $P_n(x)$ n'a aucune racine c dans cet intervalle — Il suffit pour cela d'introduire les développements de $P_n(x)$, $W_{p-1}(x)$ et $f_0(x)$ suivant les puissances positives de $(x-a)$. Une fois effectué ce changement, l'intégrale de (29), étendue à l'intervalle $[a, x]$, ne figurera pas dans la résolution du problème de Cauchy

$$x = x_0 , \; y = y_0 , \; y' = y_0' , \; \ldots , \; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

si l'on prend $x_0 = a$, et l'on aura un système linéaire qui permettra de déterminer les divers coefficients de $Q_{n+p-1}(x)$.

9. Exemples.

Un exemple simple pour l'équation (3) est constitué par l'équation

$$\frac{x^2-1}{2} y'' - xy' + y = f(x)$$

dont la solution générale s'écrit

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \int_a^x (x-t)^2 \frac{f'(t)}{t^2-1} dt + f(a)$$

ou bien sous la forme (18)

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \left[\frac{1}{2} - \frac{(x-a)^2}{a^2-1} \right] . f(a)$$

$$+ 2 \int_a^x (x-t) \frac{tx-1}{(t^2-1)^2} f(t) \, . \, dt$$

avec la condition $a^2 \neq 1$ si $f(a) \neq 0$.

La solution du problème de Cauchy ($x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$) peut être facilement déduite de cette dernière expression en prenant $a = x_0 \neq \pm 1$.

Un autre exemple est constitué par l'équation hypergéométrique du type (20)

$$(x-x^2)\,y'' - p(1-2x)\,y' - p(p+1)\,y = f_0(x) \qquad (34)$$

où $\alpha = \gamma = -p$, $\beta = -(p+1)$, *dont la solution classique ne peut être mise sous la forme connue représentée par une intégrale*, β étant un entier négatif. La solution (23) de l'équation homogène (20), dont les coefficients vérifient les conditions (24) qui prennent une forme simple

$$(j+1)\,q_{j+1} + (p+1-j)\,q_j = 0 \qquad (j = 0\,,\ 1\,,\ \ldots\,,\ p-1)$$

s'écrit en fonction des constantes arbitraires C_1 et C_2

$$y_0 = C_1 x^{p+1} + C_2 \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\, C_{p+1}^i\, x^i\,. \qquad (35')$$

Cette solution a la forme plus simple

$$y_0 = \int_0^1 h(u)\,\frac{(x-u)^{p+1}}{(p+1)!}\,du \qquad (35)$$

avec les conditions

$$\int_0^1 h(u)\,du = A_1\,,\ \int_0^1 h(u)\,u^i du = A_2\,,\ (i = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ p+1)$$

A_1 et A_2 étant des constantes arbitraires.

La solution générale de l'équation non-homogène (20) sera alors

$$y = y_0 + \frac{1}{(p+1)!}\int_a^x (x-t)^{p+1}\,\frac{f_0^{(p)}(t)}{t-t^2}\,dt + \sum_{i=0}^{p-1} w_i x^i \ (a \neq 0\,;\ 1) \qquad (36)$$

où

$$w_i = \frac{1}{(p-i+1)!\,i!}\sum_{j=i}^{p-1} (-1)^{j-i+1}\,(p-j-1)!\,.\,f_0^{(j)}(0)\,,$$

expression qui peut être facilement écrite sous une forme plus restreinte.

La vérification de (35′) est immédiate puisque $y_1 = x^{p+1}$ et $y_2 = (1-x)^{p+1}$ sont des solutions particulières connues de l'équation homogène (34). Il en est de même de (36) qui peut être dérivée $(p+2)$ fois dans les hypothèses faites.

Résumé

Les auteurs étudient une équation différentielle linéaire du n-ième ordre (3), à coefficients polynomes de la classe Appell, dont la résolution peut se faire par une voie élémentaire et qui assure une unité d'exposition au chapitre des équations différentielles du cours classique d'Analyse. Il est à remarquer que l'équation (3) a la même généralité que les équations à coefficients constants ou du type d'Euler sur lesquelles elle a l'avantage de ne pas introduire une équation algébrique caractéristique, les fonctions fondamentales étant immédiatement mises en évidence. Une extension de (3) a conduit M. C. Săulesco aux équations (20) ou (22) qui dépendent d'un paramètre entier $p > 0$, et l'exemple de l'équation hypergéométrique (24) permet la vérification directe des résultats exposés d'une manière trop succincte.

(reçu le 1er avril 1964)

Institut Polytechnique
C. Dorobanti 232
Bucarest (3)