Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL

Autor: Fréchet, Maurice

Kapitel: Fonctions complexes de variables complexes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39967

une approximation indéfinie, diverge lorsque q augmente indéfiniment ».

Ayant obtenu ce résultat négatif, Borel a cherché s'il ne serait pas possible de préciser le théorème de Weierstrass d'une autre façon. Il y a réussi au moyen de la formule remarquable

$$f(x) = \lim_{q \to \infty} \sum_{p} M_{p,q}(x) f\left(\frac{p}{q}\right)$$

où l'on suppose $o \leqslant x \leqslant 1$, où $\frac{p}{q}$ est une valeur rationnelle de x

et où $M_{p,q}(x)$ est un polynôme déterminé de degré q qui est indépendant de $f(x)$. On peut d'ailleurs choisir parmi les expressions possibles de $M_{pq}(x)$. Serge Bernstein a montré qu'on pouvait prendre l'expression particulièrement simple suivante:

$$M_{pq}(x) = C_q^p x^p (1-x)^{q-p}.$$

Fonctions complexes de variables complexes

Séries de Taylor

Borel a établi ce résultat inattendu qu'il pouvait y avoir une influence de la nature arithmétique des coefficients d'une série de Taylor sur la nature analytique de sa somme. En effet, en utilisant une propriété des déterminants obtenue par M. Hadamard, Borel a pu prouver qu'une série de Taylor à coefficients entiers ne peut représenter une fonction méromorphe que si celle-ci est une fraction rationnelle [1]).

Borel a pu aussi compléter et étendre le théorème célèbre de M. Hadamard, d'après lequel: si $\varphi(z) = \Sigma\, a_n z^n$, $\Psi(z) = \Sigma\, b_n z^n$, $f(z) = \Sigma\, a_n b_n z^n$ et si α, β sont deux points singuliers respectifs de $\varphi(z)$ et de $\Psi(z)$, $\alpha\beta$ est un point singulier de $f(z)$. Par exemple, d'après Borel: si $\varphi(z)$ et $\Psi(z)$ sont des fonctions uniformes à singularités ponctuelles, il en est de même de $f(z)$; en particulier, si $f(z)$ et $\Psi(z)$ sont méromorphes, il en est de même de $f(z)$.

[1]) Dans sa *Notice* (146), Borel a oublié de mentionner ce cas d'exception, qu'il avait pourtant signalé dans son mémoire original [11].

Dans une autre direction, Borel a démontré qu'en général le cercle de convergence d'une série de Taylor est une coupure de la fonction représentée par cette série. Ici, en général, peut signifier: si les coefficients de la série sont des nombres aléatoires indépendants.

Fonctions entières

Une fonction entière étant une fonction analytique sans point singulier, Weierstrass avait démontré qu'elle peut se mettre sous la forme:

$$e^{G(z)} \prod_{n=1}^{\infty} P_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

où a_1, a_2 ... sont les zéros de la fonction $F(z)$ considérée, où

$$P_k(u) = (1-u)\, e^{\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \ldots + + \frac{u^k}{k}},$$

dans lequel k est le plus petit nombre entier tel que la série

$$\sum_n \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \quad \textit{avec} \quad |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$$

soit convergente et où $G(z)$ est une fonction entière.

Dans le cas où il n'existe pas de nombre k et dans celui où, k existant, $G(z)$ n'est pas un polynome, Laguerre dit que la fonction $F(z)$ est de genre infini. Dans le cas contraire, Laguerre appelle *genre* de $F(z)$, le plus grand des deux nombres k et q, q étant le degré de $G(z)$. C'est le grand mérite de Laguerre d'avoir vu que les propriétés de $F(z)$ dépendent de son genre plus que de k ou de q séparément.

Les résultats de Laguerre ont été rendus plus précis par Borel au moyen de son introduction de « l'ordre » réel de $F(z)$. Il appelle ainsi le nombre ρ tel que, si l'on pose $r_n = |a_n|$, la série:

$$\sum_n \frac{1}{r_n^{\alpha}}$$

soit convergente pour $\alpha > \rho$ et divergente pour $\alpha < \rho$ (elle peut être convergente ou divergente pour $\alpha = \rho$). On voit qu'alors:

$$k \leqslant \rho \leqslant k+1.$$

Le renseignement donné par ρ étant plus précis que celui donné par k (qui pour ρ non entier n'en est que sa partie entière), on conçoit que la connaissance de ρ ait permis à Borel d'obtenir des propriétés plus précises que pour ses prédécesseurs.

C'est un nouvel exemple d'une notion introduite par Borel qui lui permet d'obtenir des résultats nouveaux et d'ouvrir une nouvelle voie à ses émules et à ses successeurs.

Ainsi H. Poincaré avait prouvé que si la fonction entière $F(z)$ est de genre p, on a

$$|F(z)| < e^{\alpha r^{p+1}}$$

où $r = |z|$, quel que soit le nombre positif α, pour r assez grand. Borel démontre que si $F(z)$ est d'ordre réel ρ, on a:

$$|F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, pour $|z|$ assez grand.

La série $\Sigma \frac{1}{r_n^p}$ peut être convergente ou divergente; quand elle est convergente, Borel montre qu'on a même

$$|F(z)| < e^{\alpha r^{\rho}}$$

quel que soit $\alpha > 0$, pour r assez grand.

H. Poincaré avait aussi limité supérieurement les modules des coefficients A_m de la même série de Taylor qui représente une fonction entière. Borel a exprimé ce résultat sous la forme suivante:

Si $F(z) = \Sigma A_q z^q$ est une fonction entière de genre p, $A_q (q\,!)^{\frac{1}{p+1}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{q}$.

Soient $M(r)$ le module maximum de $F(z)$ pour $|z| = r$ et $m(r)$ le module maximum des termes $A_q z^q$ de la série de Taylor de $F(z)$ pour $|z| = r$. Borel démontre que:

$$\frac{\log M(r)}{\log\ m(r)} \tag{1}$$

tend vers 1 lorsque r croît indéfiniment en restant en dehors d'une suite d'intervalles tels que la longueur totale de ceux qui sont compris entre R et $k R$ soit infiniment petite par rapport à R. (Plus tard G. Valiron a démontré que si $F(z)$ est d'ordre fini, le rapport (1) tend vers 1 quand $r \to \infty$ de façon quelconque).

M. Hadamard avait prouvé les réciproques des deux résultats de H. Poincaré; Borel a ensuite précisé aussi ces réciproques au moyen de son introduction de l'ordre.

Emile Picard avait démontré que si, pour une fonction entière $F(z)$, il existe deux valeurs exceptionnelles: $a \neq b$, qui ne sont jamais prises par $F(z)$, $F(z)$ est une constante. La démonstration faisait usage des « fonctions modulaires ». Pendant plus de quinze ans, les mathématiciens avaient cherché en vain à simplifier la démonstration de Picard. Borel a réussi à démontrer cette importante propriété sans faire usage de ces fonctions modulaires.

Emile Picard avait même démontré un théorème plus général: s'il existe deux nombres distincts, a, b, tels que la fonction entière $F(z)$ ne soit égale à chacun d'eux que pour un nombre fini de valeurs distinctes de z, $F(z)$ est un polynôme. Borel a démontré un théorème un peu plus général encore: Soient $P(z)$ et $Q(z)$ deux polynômes différents. Si $F(z)$ est une fonction entière de genre fini et si les équations $F(z) = P(z)$, $F(z) = Q(z)$ n'ont chacune qu'un nombre limité de racines, $F(z)$ est un polynôme. Le même mode de démonstration lui permet de nombreuses généralisations. Par exemple, si $F(z)$, $G(z)$ sont des fonctions entières de genre fini, alors quels que soient les polynômes $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, l'équation $P(z)\,F(z)+Q(z)\,G(z) = R(z)$ a nécessairement un nombre infini de racines, sauf le cas exceptionnel évident où $R(z)$ étant identiquement nul, $\dfrac{F(z)}{G(z)}$ serait une fraction rationnelle. D'après le second théorème de Picard cité ci-dessus, toute fonction entière, $F(z)$ non polynomiale, prend une infinité de fois n'importe quelle valeur, sauf, peut-être, une valeur exceptionnelle. Soit $\varphi_b(r)$ le nombre des racines de l'équation

$$F(z) = b\,,$$

dont les modules sont inférieurs à r. D'après un théorème de Picard, $\varphi_b(r)$ tend vers l'infini avec r. Borel a aussi précisé ce résultat [175, pp. 95-104].

La méthode employée par Borel pour donner une démonstration élémentaire du premier des théorèmes de Picard cités ci-dessus a été utilisée par Borel et par de nombreux auteurs pour prolonger ces résultats dans des directions variées. C'est en utilisant la démonstration de Borel mais en y précisant les valeurs de certaines constantes que LANDAU a démontré un résultat important et inattendu. A savoir que la connaissance des deux premiers coefficients du développement en série de Taylor d'une fonction entière, suffit pour déterminer le rayon d'un cercle à l'intérieur duquel la fonction prend certainement les valeurs 0 et 1.

Borel attache beaucoup d'importance à ce qu'il appelle la croissance régulière.

Soit $F(z)$ une fonction entière d'ordre fini et différent de zéro et $M(r)$ le maximum de $|F(z)|$ pour $|z| = r$. Borel a d'abord démontré que le quotient:

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} \tag{2}$$

reste compris entre deux nombres fixes quand r varie. Borel dit alors que $M(r)$ et $F(z)$ sont à croissance régulière si ce quotient tend vers une limite quand $r \to \infty$.

Si $a_1, a_2, \ldots$ sont les zéros de $F(z)$, Borel dit que $r_n = |a_n|$ a un ordre d'infinitude déterminé, quand:

$$\frac{\log n}{\log r_n} \tag{3}$$

tend vers une limite déterminée.

En combinant un théorème de Poincaré et un théorème de M. Hadamard, Borel en déduit d'abord que si les deux quotients

(2) et (3) ont chacun une limite, ces deux limites sont égales. Il démontre ensuite que, si l'un de ces quotients a une limite, l'autre a aussi une limite (alors égale à la première limite). Il observe qu'ainsi, quand la fonction entière $F(z)$ est à croissance régulière, on peut obtenir l'expression asymptotique précise du module de ses zéros en fonction de n. Ce résultat est d'autant plus important que, d'après Borel, « toutes les fonctions entières rencontrées jusqu'ici en Analyse sont des fonctions à croissance régulière ». Cette affirmation s'est trouvée s'appliquer plus tard aux fonctions entières nouvelles découvertes par Painlevé.

Ceci n'a pas empêché Borel d'indiquer des procédés variés pour obtenir des fonctions entières à croissance irrégulière. Mais il fait observer que le caractère artificiel de ces procédés ne fait que confirmer l'assertion ci-dessus.

Fonctions monogènes

Nous arrivons maintenant à l'une des découvertes les plus sensationnelles de Borel. Sa définition des fonctions monogènes et les propriétés qu'elle entraîne conduisent à un élargissement considérable de la théorie des fonctions analytiques telle qu'elle existait avant Borel.

Il explique lui-même [146, p. 39] comment il a été conduit à cet élargissement.

Digression. — Et c'est là l'occasion, pour nous, de signaler un trait commun aux cheminements de pensée qui ont conduit Borel à des généralisations très importantes dans des domaines variés. C'est une façon de penser très différente de celles qui ont conduit d'autres auteurs à d'autres généralisations.

Ces auteurs sont frappés de voir que certaines théories développées dans des domaines différents, dans des langages différents, offrent cependant de grandes similitudes. Ils cherchent, et certains arrivent, à dépouiller ces théories semblables de ce qu'elles ont de distinct et à les faire apparaître comme des formes particulières d'une théorie générale. C'est ainsi, par exemple, qu'ont été créées l'Analyse vectorielle, la Théorie des ensembles, celle des éléments aléatoires abstraits, etc...

Borel, lui, ne s'intéressait pas particulièrement aux généralisations. Il semble même, parfois, qu'il s'en défiait. C'est l'étude attentive de problèmes particuliers, où il rencontre des sortes de paradoxes, qui le contraint, pour ainsi dire, à modifier les définitions qui conduisent à ces paradoxes, afin d'éviter ces derniers. Et il découvre alors, presque malgré lui, que les définitions auxquelles il arrive ont une portée plus générale.

Par exemple, dans la théorie de la mesure, il constatait que l'ensemble des nombres entre 0 et 1, et celui des nombres rationnels compris entre 0 et 1, quoique ayant des puissances différentes, avaient même mesure (même « étendue ») au sens de Jordan. Ce résultat, qui lui paraissait paradoxal, le conduisait à considérer ce second ensemble comme étant de mesure nulle. Et, ce premier pas franchi, il arrivait à sa notion générale de mesure.

Il trouvait le même genre de paradoxe, en constatant que dans l'égalité

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \ldots + z^n + \ldots$$

le premier membre gardait un sens quand $z \neq 1$, tandis que le second n'en avait que pour $|z| < 1$. Il cherchait à éviter cc paradoxe en attribuant une convergence généralisée et une somme généralisée au second membre, pour $z \neq 1$. Et il arrivait ainsi à sa sommation exponentielle des séries divergentes, création d'une portée s'étendant infiniment au-delà de ce cas particulier.

On pourrait citer d'autres exemples. Signalons au moins celui de la théorie des fonctions monogènes.

Retour aux fonctions monogènes. — Borel dit lui-même: « Mes recherches sur les fonctions monogènes ont eu pour origine l'étude approfondie d'une série signalée dans un mémoire... » de Poincaré:

$$F(z) = \sum_p \sum_q \sum_r \frac{\alpha^p \beta^q \gamma^r}{z - \dfrac{pa + qb + rc}{p + q + r}} \tag{4}$$

les entiers p, q, r prenant toutes les valeurs positives. Cette série converge évidemment en dehors du triangle ABC dont les sommets ont pour affixes a, b, c, et la somme y représente une fonction analytique uniforme. Goursat et Poincaré avaient montré que $F(z)$ ne pouvait être prolongée, au sens de WEIERSTRASS, à l'intérieur du triangle quand p, q, r peuvent aussi avoir des valeurs nulles (avec $p+q+r \neq 0$).

Selon Borel, on n'aperçoit d'abord aucune raison pour que, si l'on exclut les valeurs nulles de p, q et r et si la fonction $F(z)$ peut être prolongée à l'intérieur du triangle [1]), ses valeurs y aient un rapport quelconque avec la série qui définit $F(z)$ hors du triangle.

Il y avait évidemment une infinité de pôles de $F(z)$ aussi voisins que l'on veut de tout point à l'intérieur du triangle. On en avait conclu, un peu hâtivement, à la divergence de la série en tout point intérieur au triangle.

Borel montre, au contraire, que $F(z)$ non seulement converge en certains points du triangle ABC, mais même qu'il y a une infinité de courbes traversant ABC sur lesquelles la série $F(z)$ converge uniformément ainsi que toutes les séries dérivées de la série $F(z)$. Ainsi la somme de la série $F(z)$ représente sur ces courbes une fonction continue admettant des dérivées continues de tous les ordres. De plus, soit γ un petit cercle intérieur à ABC, Borel montre qu'il existe au moins un point M intérieur à γ tel qu'il existe au moins une droite de convergence de la série $F(z)$ dans tout angle de sommet M. Puisque la dérivée de $F(z)$ sur chacune de ces droites est égale à la somme de la série dérivée de $F(z)$, cette dérivée de la fonction $F(z)$ est indépendante de la droite de convergence considérée. La fonction sera donc dite monogène au sens de Cauchy. L'intégrale de cette fonction sur un contour intérieur à ABC, sur lequel la série $F(z)$ converge uniformément, sera égale, selon Borel, au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus des pôles intérieurs à ce contour. On obtient ainsi une généralisation d'un des théorèmes les plus importants de Cauchy, pour cette fonction $F(z)$.

Ayant obtenu ces résultats sur la fonction de Poincaré (4), Borel retient des définitions qui leur ont donné naissance, tout ce qui peut s'exprimer pour une fonction $f(z)$, qu'elle soit représentable ou non sous la forme particulière (4). Il arrive ainsi à sa conception générale de fonction monogène.

---

[1]) C'est-à-dire si la série n'a aucun pôle formel sur les côtés du triangle ABC.

Il considère certaines suites d'ensembles parfaits C_1, C_2, ..., chacun intérieur au suivant et leur réunion C. Il considère une certaine classe (C) de tels ensembles C (ainsi nommés en l'honneur de Cauchy). Une fonction $f(z)$ sera dite monogène sur C si:

1. Elle est continue (et donc uniformément continue) sur chacun des ensembles parfaits C_p;

2. Elle admet en tout point z_0 de C une dérivée unique *au sens suivant.* z_0 appartient à une infinité des C_p; soit z' un point de l'un de ces C_p. On suppose que $\dfrac{f(z')-f(z_0)}{z'-z_0}$ a une limite quand z' tend vers z sur un de ces C_p. Si cette limite existe pour tous les C_p auxquels appartient z_0, elle sera indépendante de p puisque C_p appartient à C_{p+q}. C'est cette limite qu'on appellera la dérivée de $f(z)$ sur C.

La nouveauté apportée par Borel, c'est que la famille de ses ensembles C est plus vaste que la famille des ensembles W sur chacun desquels on peut prolonger une fonction analytique et elle contient la famille des W. Ceci étant, toute fonction analytique au sens de WEIERSTRASS est aussi une fonction monogène sur le même ensemble, mais l'inverse n'a pas lieu.

(Pour arriver plus vite aux conséquences, nous reporterons plus loin la définition des ensembles C et C_p qui est assez compliquée.)

Borel montre qu'en généralisant la notion de fonction analytique, les fonctions monogènes conservent d'importantes propriétés des fonctions analytiques, soit littéralement, soit sous une forme un peu plus compliquée.

Par exemple, l'existence de la dérivée première (définie comme plus haut) entraîne, pour une fonction monogène, l'existence des dérivées de tous les ordres; par exemple, encore: deux fonctions monogènes qui sont égales sur un arc de courbe appartenant à leur domaine commun d'existence, soit Δ, sont égales sur tout Δ [S., p. 42]. Il en est de même si, en un point de C, les deux fonctions et toutes leurs dérivées sont respectivement égales, c'est-à-dire correspondent à la même série de Taylor.

Revenons, pour mieux les caractériser, aux ensembles C. Les ensembles W, sur lesquels WEIERSTRASS définissait une fonction analytique, étaient des domaines ouverts (c'est-à-dire des ensembles d'un seul tenant et formés de points tous intérieurs à l'ensemble W considéré). Nous avons déjà dit que Borel définit ses fonctions monogènes sur certains ensembles C plus généraux que les W. Précisons que les C_p (dont la réunion constitue C) peuvent être non denses quel que soit p et que l'ensemble complémentaire de C_p est formé de régions disjointes, en nombre fini ou non, mais dont les frontières, γ_p, ont une longueur totale finie L_p.

Soit Γ_p l'ensemble des points x de C où l'intégrale:

$$\int_{\gamma_p} \frac{|dz|}{|z-x|^{\alpha+1}}$$

est finie pour tout $\alpha > 0$. Soit $f(z)$, une fonction bornée sur chaque C_p et qui possède une dérivée finie et continue relativement à Γ_p.

Borel montre que $f(x)$ sera donnée dans Γ_p, par

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_p} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

et obtient ainsi une généralisation de la formule célèbre de Cauchy.

Après que Borel eut créé et étudié la théorie des fonctions monogènes, d'éminents mathématiciens comme Carleman, Denjoy, Mandelbrojt, ..., ont approfondi et prolongé sa théorie.

Prolongements. — Borel avait démontré [57] qu'on peut développer $\dfrac{1}{1-z}$ en série de polynômes:

$$\frac{1}{1-z} = \sum \sigma_n(z)$$

convergeant absolument en dehors de la demi-droite où z est réel et > 1. C'était un premier exemple de série de polynômes permettant de sortir du cercle de convergence d'une série de Taylor (ici Σz^n).

Borel généralise le résultat précédent. Il montre qu'il est possible de substituer à une série de Taylor ayant un rayon de convergence fini, une série de polynômes ayant pour coefficients des combinaisons linéaires des coefficients de la série de Taylor et qui peut converger non seulement à l'intérieur du cercle de convergence de la série de Taylor mais même au-delà.

Borel a aussi découvert un autre moyen de sortir du cercle de convergence d'une série de Taylor. C'est en vue de ce moyen, qu'il avait créé la « sommation exponentielle absolue », définie plus haut (p. 51). Celle-ci lui permet d'assigner une somme généralisée à la série de Taylor, qui coïncide avec la somme ordinaire à l'intérieur du cercle de convergence mais qui existe encore jusqu'à une certaine distance de ce cercle sur tout rayon prolongée au-delà d'un point non singulier sur la circonférence du cercle. Plus précisément, la somme généralisée existe à l'intérieur du « polygone de sommabilité » de la série. Ce polygone s'obtient en menant une tangente au cercle en tout point singulier. (Ce polygone peut s'étendre dans certaines directions jusqu'à l'infini. Par exemple, pour la série Σz^n, le polygone de sommabilité sera évidemment le demi-plan contenant le cercle $|z| < 1$ et limité par la tangente au cercle au point $z = 1$).

Ce résultat important dépasse ceux de Weierstrass. Car Borel a formé des fonctions pour lesquelles il existe des régions où le prolongement a son sens, de la série de Taylor correspondante, est possible alors qu'il ne l'est pas par la méthode de Weierstrass du prolongement analytique.

Equations différentielles et aux dérivées partielles

Borel a étudié les relations entre une équation différentielle linéaire :

$$\mathscr{L}[y] \equiv L(x)\,y^{(n)} + P(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + T(x)\,y' + U(x)\,y = 0$$

et son équation adjointe :

$$\mathscr{M}[y] \equiv (Lz)^{(n)} - (Pz)^{(n)-1} + \ldots + (-1)^n\,Uz = 0\,.$$

On savait déjà, depuis Lagrange, que, par une suite d'intégration par parties, on arrive à la relation :

$$\int z\,\mathscr{L}[y]\,dx - \int y\mathscr{M}[z]\,dx = A\,(x, y, y', \ldots y^{n-1}, z, z', \ldots z^{(n-1)})$$

où A dépend linéairement de $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ et de $z, z', \ldots z^{(n-1)}$.