

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL  
**Autor:** Fréchet, Maurice  
**Kapitel:** Fonctions réelles (de variables réelles)  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39967>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Il pense évidemment aux prolongements de ses résultats. Les diverses observations que nous avons faites plus haut conduisent à penser qu'il y aurait d'abord lieu de reprendre l'exposé de ses résultats en y introduisant les compléments qu'ils réclament.

Il est regrettable que le souhait de Borel n'ait pas encore été exaucé, malgré l'importance de la notion de raréfaction, des définitions si originales de Borel et de leurs applications possibles.

(La notion de raréfaction est utile, entre autres, dans l'étude des fonctions de variable complexe et dans le calcul des probabilités).

### FONCTIONS RÉELLES (DE VARIABLES RÉELLES)

Borel a démontré [87, p. 37] que si  $r_n(x)$  est le reste de rang  $n$  d'une série de fonctions de  $x$ , mesurables, qui converge sur un segment  $(a, b)$ , la mesure de l'ensemble des points  $x$  où  $|r_n(x)| > \varepsilon$

tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$  pour toute valeur positive de  $\varepsilon$ . Borel

a aussi démontré [133, s, p. 158] que: étant donnée une fonction  $F(x)$ , bornée, définissable analytiquement sur un segment  $(a, b)$  et deux nombres positifs,  $\varepsilon, \alpha$ , on peut trouver un polynôme  $P(x)$  tel que la mesure  $B$  de l'ensemble des points  $x$  où  $|F(x) - P(x)| > \varepsilon$  soit inférieure à  $\alpha$ .

En faisant tendre  $\varepsilon$  et  $\alpha$  vers zéro, Borel en déduit qu'il y a une suite de polynômes  $P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$  qui converge vers  $F(x)$  presque partout (c'est-à-dire sauf, peut-être, sur un ensemble de mesure nulle).

Borel conclut: « Les singularités des fonctions  $f(x)$  occupent très peu de place; il est, par suite, possible, dans bien des circonstances, d'opérer comme si elles n'existaient pas. »

C'est un de ses arguments pour écarter l'étude des fonctions définies abstraitemen t et pour se restreindre à celle des fonctions « calculables ».

### *Intégration.*

Borel déduit des résultats précédents une définition de l'intégrale, totalement différente de celle de Lebesgue, quoiqu'elle lui soit équivalente dans le cas où la fonction intégrée est bornée.

Par définition, si  $f(x)$  est bornée et définissable analytiquement sur un segment  $(a, b)$  et par suite s'il existe une suite de polynomes  $P_n(x)$  qui converge presque partout vers  $f(x)$  sur  $(a, b)$ , l'intégrale de  $f(x)$  sur  $a, b$  sera la limite de la suite des intégrales  $\int_a^b P_n(x) dx$ .

Cette définition semble plus simple que celle de Lebesgue. Mais elle se prête moins à l'extension d'une définition de l'intégrale au cas où la variable et la fonction sont deux éléments de deux espaces de Banach, extension nécessaire dans le calcul des probabilités et ailleurs.

Une polémique s'est élevée ensuite entre Borel et Lebesgue sur la définition de l'intégrale, dans quatre articles ou notes des *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, de 1918 à 1920. Dans la première, Borel avait présenté sa définition, qu'il considérait comme constructive, contrairement à celle de Lebesgue.

Lebesgue a réagi violemment. Dans sa réclamation, à côté de remarques justes, on s'aperçoit qu'il interprète, à tort, certaines remarques de Borel de la façon qui lui est la plus défavorable (à lui, Lebesgue), et c'est ce qui lui permet, en partant de là, d'en établir le mal-fondé. Cette attaque excessive a été très pénible à Borel, qui rappelle en quels termes admiratifs il a célébré les travaux de Lebesgue.

En résumé, la priorité de Lebesgue dans la définition de l'intégrale est incontestable. Mais, d'une part, elle utilise de façon essentielle la notion de mesure introduite par Borel, et, d'autre part, elle n'enlève rien à l'intérêt de la définition, entièrement différente, de Borel. Au reste, plus tard, F. RIESZ et HAAR, en donnant chacun une définition différente des précédentes, témoignent eux-mêmes que leurs définitions, qui sont constructives, ont suivi la voie tracée par Borel.

### *Séries dérivées.*

Borel a prouvé qu'étant donnés des nombres réels arbitraires  $a_0, a_1, \dots$ , on peut toujours former une fonction de variable

réelle,  $f(x)$ , telle que pour  $x = 0$ , par exemple,  $f(x)$  ait des dérivées de tous les ordres et que pour  $x = 0$ ,  $f(x)$  et ses dérivées successives aient respectivement les valeurs  $a_0, a_1, \dots$ . On peut choisir en particulier  $a_0, a_1, \dots$  de sorte que le développement de  $f(x)$  en série de Taylor diverge plus rapidement qu'une série entière donnée d'avance.

D'autre part, Borel a montré que toute fonction de variable réelle  $\varphi(x)$ , admettant des dérivées de tout ordre dans un intervalle I donné, peut être mise sous la forme de la somme d'une série de Taylor et d'une série de Fourier, ces séries et les dérivées successives terme à terme de ces séries convergeant uniformément dans I. Et leurs sommes respectives convergent vers les dérivées correspondantes de  $\varphi(x)$ .

Ces théorèmes importants ont été obtenus par Borel en faisant usage d'une méthode ingénieuse et nouvelle pour la résolution d'un système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Avant lui, on avait cherché à résoudre un tel système en utilisant l'analogie avec les systèmes finis comportant le même nombre d'inconnues que d'équations. Borel, au contraire, observe que, du moment qu'il y a une infinité d'inconnues, on peut déterminer pour chaque équation autant d'inconnues que l'on veut: on aura toujours un nombre suffisant d'indéterminées dans les équations suivantes. De plus, Borel indique comment procéder pour ces choix successifs de valeurs des inconnues.

### *Interpolation.*

La formule d'interpolation de Lagrange permet de déterminer le polynôme  $P_q(x)$  de degré  $q$  qui est égal à une fonction donnée  $f(x)$  pour  $q+1$  valeurs données de  $x$ . D'autre part, on sait, d'après WEIERSTRASS, qu'on peut déterminer un polynôme aussi approché que l'on veut d'une fonction continue donnée. Il est alors naturel de se demander si le polynôme  $P_q(x)$  ne pourrait fournir un tel polynôme en l'égalant à  $f(x)$  pour un grand nombre  $q$  de valeurs de  $x$ .

Sans savoir que MÉRAY, puis RUNGE avaient déjà répondu par la négative, Borel a d'abord formé [86] «un exemple d'une fonction pour laquelle la formule de Lagrange, loin de donner

une approximation indéfinie, diverge lorsque  $q$  augmente indéfiniment ».

Ayant obtenu ce résultat négatif, Borel a cherché s'il ne serait pas possible de préciser le théorème de Weierstrass d'une autre façon. Il y a réussi au moyen de la formule remarquable

$$f(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_p M_{p,q}(x) f\left(\frac{p}{q}\right)$$

où l'on suppose  $0 \leq x \leq 1$ , où  $\frac{p}{q}$  est une valeur rationnelle de  $x$

et où  $M_{p,q}(x)$  est un polynôme déterminé de degré  $q$  qui est indépendant de  $f(x)$ . On peut d'ailleurs choisir parmi les expressions possibles de  $M_{p,q}(x)$ . Serge BERNSTEIN a montré qu'on pouvait prendre l'expression particulièrement simple suivante:

$$M_{pq}(x) = C_q^p x^p (1-x)^{q-p}.$$

## FONCTIONS COMPLEXES DE VARIABLES COMPLEXES

### Séries de Taylor

Borel a établi ce résultat inattendu qu'il pouvait y avoir une influence de la nature arithmétique des coefficients d'une série de Taylor sur la nature analytique de sa somme. En effet, en utilisant une propriété des déterminants obtenue par M. HADAMARD, Borel a pu prouver qu'une série de Taylor à coefficients entiers ne peut représenter une fonction méromorphe que si celle-ci est une fraction rationnelle<sup>1)</sup>.

Borel a pu aussi compléter et étendre le théorème célèbre de M. Hadamard, d'après lequel: si  $\varphi(z) = \sum a_n z^n$ ,  $\Psi(z) = \sum b_n z^n$ ,  $f(z) = \sum a_n b_n z^n$  et si  $\alpha, \beta$  sont deux points singuliers respectifs de  $\varphi(z)$  et de  $\Psi(z)$ ,  $\alpha, \beta$  est un point singulier de  $f(z)$ . Par exemple, d'après Borel: si  $\varphi(z)$  et  $\Psi(z)$  sont des fonctions uniformes à singularités ponctuelles, il en est de même de  $f(z)$ ; en particulier, si  $f(z)$  et  $\Psi(z)$  sont méromorphes, il en est de même de  $f(z)$ .

---

<sup>1)</sup> Dans sa *Notice* (146), Borel a oublié de mentionner ce cas d'exception, qu'il avait pourtant signalé dans son mémoire original [11].