

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL  
**Autor:** Fréchet, Maurice  
**Kapitel:** Raréfaction d'un ensemble de mesure nulle  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39967>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Soit alors  $F$  l'ensemble des points qui sont chacun intérieurs à une infinité des intervalles  $I_n$ .  $F$  comprend  $E$  et appartient à la fermeture  $\bar{E}$  de  $E$ . En particulier, si  $E$  est fermé,  $E$  est identique à  $F$ .

III. On trouvera plus loin des applications très nombreuses de la notion de mesure dans la théorie de l'intégration, dans la théorie des fonctions et dans le calcul des probabilités.

#### RARÉFACTION D'UN ENSEMBLE DE MESURE NULLE

C'est au cours de ses études des fonctions monogènes que Borel a senti la nécessité d'introduire la notion d'ensemble de mesure nulle (*avant* d'avoir défini la mesure d'un ensemble). Les mêmes études lui ont fait voir qu'il faudrait distinguer entre les différentes sortes de mesure nulle. Et cette nécessité s'est présentée à nouveau en calcul des Probabilités. Il a alors introduit la notion de « mesure asymptotique » d'un ensemble [169], dont, beaucoup plus tard, il a légèrement modifié la définition sous le nom de « raréfaction » (d'un ensemble de mesure nulle). Cette notion nouvelle a moins attiré l'attention que celle de mesure. Et pourtant, nous sommes d'accord avec Borel pour penser que l'importance de cette classification des ensembles de mesure nulle « paraît devoir être comparable à celle de la notion même d'ensemble de mesure nulle. »

Mais si Borel a même pu imaginer trois modes distincts de classification, il n'en a pas établi les relations. Et s'il a obtenu des résultats importants, c'est en partant d'hypothèses qui ne sont pas toujours nécessaires et ne sont pas toujours suffisantes. Avant donc de prolonger et d'appliquer la théorie de Borel, il y aurait lieu de la revoir et de la compléter pour la rendre plus cohérente.

Pour toutes ces raisons, nous serions heureux si ces quelques lignes pouvaient inciter de jeunes chercheurs à entreprendre une étude plus systématique et plus complète de la raréfaction et à en donner des applications.

La première idée de Borel, [*S*, p. 185] consiste à établir une inégalité symbolique, (à définir), entre une sorte de « grandeur »

d'un ensemble de mesure nulle,  $E$ , et la rapidité de convergence d'une série convergente à termes positifs associée convenablement à  $E$ . Nous avons vu qu'il existe au moins une suite dénombrable d'intervalles  $I_n$  qui « surcouvre »  $E$  et dont la série des longueurs  $\Sigma l_n$  est convergente.

Borel dit alors que « la mesure asymptotique de  $E$  » est « inférieure » ou égale » à  $\Sigma l_n$ . Il est revenu plus tard à la question et a perfectionné son idée primitive. Au lieu de définir la « grandeur » d'un ensemble comme inférieure ou égale à la convergence d'une série, notions qui sont des entités totalement différentes, il compare directement entre eux deux ensembles  $E, F$  de mesure nulle et ramène cette comparaison à celle des convergences de séries.

Une première façon d'opérer serait la manière suivante. Disons provisoirement d'un ensemble dénombrable  $\mathcal{T}$  d'intervalles qui « surcouvre »  $E$  et est de longueur totale finie, qu'il « majore »  $E$ . Soient alors, de même,  $\mathcal{U}$  un ensemble dénombrable d'intervalles qui majore  $F$ . On dira que  $E$  est plus *raréfié* que  $F$  si la série  $V$  des longueurs des intervalles de  $\mathcal{T}$  converge plus rapidement (voir p. 45) que la série  $U$  analogue pour  $\mathcal{U}$ .

Mais plusieurs difficultés se présentent. D'abord, le fait que l'ensemble dénombrable d'intervalles  $\mathcal{T}$  majore  $E$  est indépendant de l'ordre de ces intervalles, tandis que la rapidité de la convergence, de leurs longueurs peut en dépendre, comme nous l'avons montré ailleurs (voir p. 45). Dans la définition précédente, il ne faut pas faire intervenir  $T$ , mais une suite dans un ordre déterminé des intervalles de  $\mathcal{T}$ . Borel suppose, plus loin, que l'on a rangé la suite par ordre de longueurs non croissante. D'autre part, non seulement, il y a plusieurs suites formées avec  $\mathcal{T}$  qui majorent  $E$ , mais il n'y a pas un seul ensemble  $\mathcal{T}$  qui majore  $E$ .

Borel fait face à cette difficulté en se plaçant dans le cas où, parmi les suites  $S$  d'intervalles qui majorent  $E$ , il y en a une,  $S_0$ , qui converge plus rapidement <sup>1)</sup> que toutes les autres. En réalité, cela n'est pas possible, mais il suffit de supposer que  $S_0$  converge au moins aussi rapidement que tous les  $S$ . Quand il y a, de même, pour  $F$ , une suite  $\varepsilon_0$  d'intervalles majorant  $F$  qui con-

---

<sup>1)</sup> Expression abrégée pour dire que la série des longueurs des intervalles de  $S_0$  converge plus rapidement que la série analogue pour  $S$ .

verge au moins aussi rapidement que toute autre suite  $\varepsilon$  analogue, on dira que  $E$  est plus raréfié que  $F$  si la suite  $S_o$  converge plus rapidement que  $\varepsilon_o$ .

Borel écrit [285, p. 164] « nous discuterons plus loin les difficultés que peut présenter ce choix [celui de  $S_o$ ]; ce qui est certain, c'est qu'il y a de nombreux exemples où ce choix s'impose et ne peut être modifié; les ensembles de mesure nulle correspondants sont donc classés les uns par rapport aux autres sans ambiguïté ».

Borel traite, en effet, de nombreux exemples d'ensembles de mesure nulle auxquels il associe des suites majorantes déterminées. Ces associations sont naturelles d'un point de vue intuitif. Mais nous n'avons pas vu démontré par Borel que ces suites majorent au moins aussi rapidement (au sens de sa propre définition) que toutes les autres suites correspondantes: c'est, par exemple, ce qu'on constate, aux 11<sup>e</sup> et 12<sup>e</sup> lignes de la p. 179 [285]. Tout se passe comme si Borel, dans ses exemples, ignorait sa propre définition de l'inégalité de deux raréfactions pour y substituer une définition intuitive. C'est encore ce qu'il fait dans les pages 184 à 191 de son livre consacrées au « calcul de la raréfaction ». Il y introduit un symbolisme très ingénieux de la raréfaction. Par exemple, la raréfaction d'un ensemble  $E$  réduit à un point est symbolisée par  $\omega^{-1}$ , où  $\omega$  est le premier nombre transfini de Cantor. La raréfaction de l'ensemble  $F$  des nombres décimaux qui n'utilisent pas un chiffre donné (par exemple, 7) est symbolisée par  $\omega^{-(1-b)}$  où :

$$b = \frac{\log 9}{\log 10} .$$

Mais si  $1-b$  est bien plus petit que 1, si l'on est tenté d'écrire que  $\omega^{-1}$  est plus petit que  $\omega^{-(1-b)}$  et d'en conclure que  $E$  est plus raréfié que  $F$ , cette dernière conclusion n'est pas démontrée par Borel quand on a recours à sa première définition.

D'autre part, Borel introduit deux autres limitations qui ne nous paraissent pas indispensables. Il se restreint à l'étude des ensembles boréliens (de mesure nulle) et au cas où la convergence des séries de longueurs qu'il considère est « régulière ». Or,

comme nous l'avons montré (C. R. du 27 Février 1961), on peut obtenir un certain nombre de propriétés de la raréfaction qui subsistent quand on n'impose aucune de ces deux limitations.

Borel définit encore deux autres sortes de raréfaction. La première est la « raréfaction logarithmique ». Il considère un ensemble  $E$  de mesure nulle non dense, contenu dans  $(0, 1)$  et déterminé par la connaissance d'une infinité d'intervalles contigus  $I_i = a_i b_i$  de longueurs  $m_i$ . Il désigne par  $N(x) - 1$  le nombre des  $I_i$  dont la longueur est  $\geq x$  et par  $P(x)$  la longueur totale des  $N(x)$  intervalles à l'intérieur desquels sont les points de  $E$  (quand les  $I_i$  n'ont pour extrémité ni 0, ni 1).

Quand  $x \rightarrow 0$ , le rapport :

$$\rho(x) = \frac{\log N(x)}{\log N(x) - \log P(x)}$$

a une plus grande limite finie  $\rho$  que Borel appelle *raréfaction logarithmique* de  $E$ . A titre d'exemple, Borel considère l'ensemble de mesure nulle constitué des points dont les abscisses entre 0 et 1 ont un développement décimal n'utilisant que les nombres 2, 5, 8. Il trouve que sa raréfaction logarithmique a pour valeur :

$$\rho = \frac{\log 3}{\log 10}.$$

Or, il avait déjà symbolisé la raréfaction de tels ensembles par la notation  $\frac{\omega^\rho}{\omega}$ . Il y voit une rencontre et une confirmation de la compatibilité de ces définitions. Mais aucun rapport n'est signalé entre cette définition et sa définition primitive par comparaison de rapidité de convergence des suites majorantes.

En application, Borel étudie la « somme vectorielle »  $C = (A) + (B)$  de deux ensembles  $A, B$  compris dans  $(0, 1)$ , définie comme l'ensemble de ceux des points de  $(0, 1)$  dont l'abscisse est la somme des abscisses d'un point de  $A$  et d'un point de  $B$ .

Il donne un exemple où la somme des raréfactions logarithmiques étant égale à l'unité, la somme vectorielle a pour mesure l'unité :

Après démonstration simplifiée d'un résultat dû à Marshall Hall, Borel donne une troisième définition de la raréfaction, distincte des précédentes et qu'il appelle la *raréfaction relative minimum* ou plus brièvement la raréfaction  $R$ .

On considère un ensemble  $E$  de mesure nulle, compris dans  $(0 ; 1)$ , comprenant les extrémités 0 et 1 mais dense nulle part. On l'obtient en enlevant du segment  $(0 ; 1)$  des intervalles  $N$  contigus à  $E$  et denses dans tout intervalle. On peut supposer qu'on les place dans leur ordre de grandeur non croissante. Soit  $b_n$  la longueur du plus petit de  $n+1$  intervalles  $B$ : ceux qui restent quand on a placé  $n$  intervalles  $N$ , dont le plus petit est de longueur  $a_n$ . En posant :

$$\mu_n = \frac{b_n}{a_n + b_n}$$

Borel désigne par  $R$  le plus grand nombre inférieur à tous les  $\mu_n$ .<sup>1)</sup>

Dans le cas où l'on a  $b_n \geq a_n$ , pour tout  $n$ , on aura

$$r_n \geq \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad R \geq \frac{1}{2}.$$

Borel montre que: pour que la somme vectorielle de deux ensembles  $E, E'$  de raréfaction  $R$  et  $R'$  renferme tous les points de l'intervalle  $(0; 2)$ , il suffit que l'on ait:

$$R + R' \geq 1.$$

Plus généralement, la somme vectorielle de  $E, E'$  a une raréfaction  $R''$  telle que:

$$R'' \geq R + R'.$$

Borel, toujours novateur, a ainsi défini trois sortes de raréfactions. Mais il les a étudiées indépendamment, sans s'occuper de savoir si les définitions de l'inégalité de raréfaction qui en découlent sont compatibles.

Borel a écrit [285, p. 191]: « La théorie de la raréfaction qui complète celle de la mesure est un sujet d'étude assez vaste; je souhaiterais qu'il tentât de jeunes chercheurs. »

\*) Voir notre Note aux C. R. 1962.

Il pense évidemment aux prolongements de ses résultats. Les diverses observations que nous avons faites plus haut conduisent à penser qu'il y aurait d'abord lieu de reprendre l'exposé de ses résultats en y introduisant les compléments qu'ils réclament.

Il est regrettable que le souhait de Borel n'ait pas encore été exaucé, malgré l'importance de la notion de raréfaction, des définitions si originales de Borel et de leurs applications possibles.

(La notion de raréfaction est utile, entre autres, dans l'étude des fonctions de variable complexe et dans le calcul des probabilités).

#### FONCTIONS RÉELLES (DE VARIABLES RÉELLES)

Borel a démontré [87, p. 37] que si  $r_n(x)$  est le reste de rang  $n$  d'une série de fonctions de  $x$ , mesurables, qui converge sur un segment  $(a, b)$ , la mesure de l'ensemble des points  $x$  où  $|r_n(x)| > \varepsilon$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$  pour toute valeur positive de  $\varepsilon$ . Borel a aussi démontré [133, s, p. 158] que: étant donnée une fonction  $F(x)$ , bornée, définissable analytiquement sur un segment  $(a, b)$  et deux nombres positifs,  $\varepsilon, \alpha$ , on peut trouver un polynôme  $P(x)$  tel que la mesure  $B$  de l'ensemble des points  $x$  où  $|F(x) - P(x)| > \varepsilon$  soit inférieure à  $\alpha$ .

En faisant tendre  $\varepsilon$  et  $\alpha$  vers zéro, Borel en déduit qu'il y a une suite de polynômes  $P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$  qui converge vers  $F(x)$  *presque partout* (c'est-à-dire sauf, peut-être, sur un ensemble de mesure nulle).

Borel conclut: « Les singularités des fonctions  $f(x)$  occupent très peu de place; il est, par suite, possible, dans bien des circonstances, d'opérer comme si elles n'existaient pas. »

C'est un de ses arguments pour écarter l'étude des fonctions définies abstraitement et pour se restreindre à celle des fonctions « calculables ».