$$\int_0^{+\infty} e^{-a} u(a)\, da\ , \int_0^{+\infty} e^{-a} \,|\, u(a) \,|\, da\ , \int_0^{+\infty} e^{-a} \,|\, u^{(r)}(a) \,|\, da$$

et ceci quel que soit l'ordre r de dérivation dans $u^{(r)}(a)$.

Ceci étant, Borel démontre ce que deviennent les propriétés 2°, 3°, 4°, 5° quand on y suppose les séries données absolument sommables et quand on affirme que les séries qui en sont déduites dans ces propriétés sont absolument sommables. La propriété 1° subsiste aussi sous la forme: toute série convergente est absolument sommable et sa somme est égale à sa somme généralisée. De ces résultats, Borel déduit un théorème très général: si l'on a un polynome à une ou plusieurs variables réelles, par exemple, $P(u, v, w)$, si l'on y remplace u, v, w par des séries absolument sommables et si l'on développe formellement $P(u, v, w)$ après ce remplacement, on obtient une série absolument sommable dont la somme généralisée est égale au résultat obtenu en remplaçant dans $P(u, v, w)$, u, v, w par leurs sommes généralisés.

Mais c'est l'intervention des séries divergentes dans la théorie des fonctions de variables complexes qui a incité Borel à les rendre convergentes en un sens plus général et qui a fourni la plus importante de ses applications (dont nous parlerons plus loin), sa sommabilité exponentielle. Après les publications de Borel sur ce sujet, le nombre des mémoires d'autres auteurs sur les séries divergentes a décuplé.

Théorie des ensembles

Plaçons-nous dans un espace R à 1, 2, 3 ou un nombre fini de dimensions. Borel appelle ensemble bien défini et on appelle ensemble borélien (ou ensemble B) soit un ensemble élémentaire (intervalle, rectangle, cube, etc ...) soit un ensemble formé à partir d'ensembles élémentaires par la répétition, un nombre fini ou dénombrable de fois, des deux opérations suivantes:

I. Réunion d'une suite dénombrable finie ou infinie, d'ensembles disjoints déjà définis.

II. Différence de deux ensembles déjà définis dont l'un contient l'autre.

Borel démontre alors deux théorèmes qui sont fondamentaux pour la théorie des fonctions:

I. Si tous les points d'un ensemble borné et fermé sont intérieurs chacun à l'un au moins des ensembles élémentaires F_1, F_2, ..., ils sont intérieurs chacun à l'un au moins d'un nombre fini fixe (F_{r_1}, F_{r_2}, ... F_{r_s}) des ensembles F_n.

II. Soit E un ensemble borélien et $\varepsilon > o$. On peut rassembler un nombre fini d'ensembles élémentaires I_1, ... I_n tel que l'ensemble des points de E qui n'appartiennent à aucun des I_r et des points des I_r qui n'appartiennent pas à E soit compris à l'intérieur de la réunion d'ensembles élémentaires en nombre fini dont l'étendue totale est $< \varepsilon$.

Mesure des ensembles

La découverte d'une définition satisfaisante de la mesure d'un ensemble a joué un rôle capital dans l'élaboration des nouvelles théories développées par Borel et ses disciples ou successeurs.

Après avoir exprimé la notion intuitive de la mesure par la longueur d'un segment rectiligne, par l'aire d'un polygone, par le volume d'un polyèdre, etc. ..., les mathématiciens se sont efforcés de traduire cette notion intuitive dans le cas plus général de la mesure d'un ensemble euclidien (en commençant par le cas d'un ensemble linéaire). Des définitions à cet effet ont été progressivement proposées, entre autres par Riemann, Cantor, Darboux et Jordan. Un nouveau progrès était nécessaire.

Chaque progrès avait consisté à estimer la mesure d'un ensemble E au moyen de la longueur totale d'un ensemble d'intervalles couvrant E. Mais on avait toujours pris ces intervalles parmi des intervalles choisis d'avance. Borel a écrit lui-même que son point de départ a été de prendre, pour chaque ensemble, des intervalles non seulement couvrant l'ensemble mais dépendant directement de cet ensemble. En prenant comme intervalles ceux qu'on obtient en divisant un segment en parties égales, Jordan arrivait à la conclusion que l'ensemble