

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL  
**Autor:** Fréchet, Maurice  
**Kapitel:** II. Sommabilité d'une série  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39967>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

changeant l'ordre des termes, on peut obtenir une série moins rapidement convergente, même au sens de Borel, que  $\Sigma u'_n$ .

Borel s'attache particulièrement au cas où les séries considérées ont une « convergence régulière » parce que, d'après lui, ce sont les seules séries qui se rencontrent naturellement. Il montre cependant qu'on peut « fabriquer » une convergence irrégulière et, par exemple, construire une série où les sommes partielles  $s_n$  sont, pour une suite de valeurs de  $n$ , voisines de  $e^n$  et pour une autre suite de valeurs de  $n$ , voisines de  $e^{e^n}$ .

Représentons par la notation

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$$

le fait que la série  $s$  converge plus rapidement que la série  $t$ ; on voit facilement que cette notation est transitive. Nous avons pu montrer par un exemple (voir la note ci-dessus) que la relation:  $\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$  (exprimant qu'on n'a pas:  $\text{Rap. } t \succ \text{Rap. } s$ ) n'est pas transitive. Mais notre exemple est à convergence irrégulière. Il serait intéressant de voir si la relation redevient transitive quand on se borne aux convergences régulières.

## II. *Sommabilité d'une série*

Borel a obtenu ([5]) une condition suffisante pour qu'en opérant un certain changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente, on n'altère pas sa somme: il suffit que le produit du terme général (de rang  $m$ ) par le déplacement maximum des termes qui le précèdent, tende vers zéro avec  $\frac{1}{m}$ .

Mais la contribution principale et très remarquable de Borel concernant les séries, c'est sa définition des séries divergentes sommables, [19], [41], [42] et l'étude de leurs propriétés.

L'égalité:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots$$

n'était traditionnellement valable que pour  $|x| < 1$ , c'est-à-dire quand la série était convergente au sens classique.

Mais quand  $|x| > 1$ , le premier nombre garde un sens alors que le second n'en a plus aucun. Ne peut-on généraliser le sens du mot somme de telle façon que, quand la série aurait une somme au nouveau sens, cette somme soit précisément égale au premier nombre. Avec d'autres, Borel a indiqué et étudié une réponse étendue à cette question, mais il en a tiré de nouvelles et importantes conséquences. Il précise d'abord les conditions qu'il est naturel d'imposer à tout procédé de sommation.

- 1° Toute série convergente doit être sommable avec la même somme généralisée.
- 2° Si l'on modifie un nombre fini de termes d'une série sommable,  $\Sigma u_n$ , on obtient une série  $\Sigma v_n$  qui doit être sommable et les sommes généralisées ne doivent différer que de la façon qui s'impose, c'est-à-dire d'un nombre égal à  $(u_0 + \dots + u_r) - (v_0 + \dots + v_r)$  si le dernier terme modifié est de rang  $r$ .
- 3° Si  $\Sigma w_n$  est aussi une série sommable et si  $\beta, \gamma$  sont deux nombres réels quelconques, la série  $\Sigma (\beta u_n + \gamma w_n)$  doit être aussi sommable et sa somme généralisée doit être égale à  $\beta s + \gamma t$  si  $s$  et  $t$  sont les sommes généralisées de  $\Sigma u_n$  et  $\Sigma w_n$ .

Il impose encore deux autres conditions 4° et 5° que nous énoncerons plus loin.

Si  $s_n = u_0 + \dots + u_n$  reste compris entre deux bornes quand  $n$  varie, il est naturel d'imposer à la somme généralisée d'être aussi entre ces deux bornes. Dès lors, Borel observe :

1° qu'un moyen d'y parvenir est de prendre pour somme généralisée une moyenne des  $s_n$  ;

2° mais la somme généralisée devrait se rapprocher surtout des  $s_n$  de rangs élevés. Il y a donc lieu, pour le calcul de leur moyenne, d'affecter les  $s_n$  de poids d'autant plus grands que  $n$  est plus grand. Pour réaliser cette condition au maximum, Borel propose de faire dépendre les poids d'un paramètre  $a$  de façon que la discrimination souhaitée s'accroisse quand  $a$  augmente. Plus précisément, il propose de prendre une moyenne de la forme :

$$\frac{c_0 s_0 + \dots + c_n a^n s_n + \dots}{c_0 + c_1 a + \dots + c_n a^n + \dots}$$

où les  $c$  sont des nombres  $> 0$ , le dénominateur  $\neq 0$  et où l'on fait croître  $a$  indéfiniment.

Borel abandonne alors ces généralités et choisit de prendre :

$$c_n = \frac{1}{n!}$$

de sorte que le poids de  $s_n$  sera :

$$e^{-a} \frac{a^n}{n!}$$

et la somme généralisée sera la limite quand  $a \rightarrow +\infty$ , de

$$e^{-a} \sum \frac{a^n s_n}{n!} .$$

Il montre que cette définition vérifie les conditions 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, ci-dessus.

On peut observer que ce dernier résultat peut être obtenu pour une sommation beaucoup plus générale.

Appelons  $P$  la suite de poids  $p_0(a), \dots p_n(a) \dots$  vérifiant naturellement les conditions classiques

$$p_n(a) \geq 0, \quad \sum_n p_n(a) = 1 .$$

Pour réaliser la condition supplémentaire désirée sur les poids, nous supposerons, de plus, que pour chaque  $n$  fixe :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} p_n(a) = 0 ,$$

car les premiers des  $p_0(a), \dots p_n(a), \dots$  seront très petits pour  $a$  assez grand, alors que  $\sum p_n(a)$  restant égal à l'unité, les suivants ne le seront que pour  $a$  beaucoup plus grand. En résumé, nous dirons qu'une série  $\sum u_n$  est sommable  $P$  si :

A. La série

$$m(a) = s_0 p_0(a) + \dots + s_n p_n(a) + \dots$$

est convergente quel que soit  $a$  (ou au moins pour  $a$  assez grand).

B. Quand  $a \rightarrow +\infty$ ,  $m(a)$  tend vers une limite finie,  $s$ .

Alors,  $s$  sera appelée la *somme généralisée*  $P$  de  $\sum u_n$ .

A titre d'exemples où les conditions A, B, sont réalisées figurent non seulement la sommation exponentielle de Borel, où

$$p_n(a) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}$$

mais aussi plusieurs définitions connues de la sommabilité, où  $p_n(a)$  a des expressions différentes.

Par exemple, Cesaro prend dans sa définition (C, 1)  $a$  entier et

$$p_n(a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{pour } n < a \\ 0 & \text{pour } n \geq a. \end{cases}$$

Marcel Riesz prend, dans sa définition (C,  $\delta$ ),  $a$  entier et

$$m(a) = u_0 + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^\delta u_1 + \dots + \left(1 - \frac{a-1}{a}\right)^\delta u_{a-1};$$

donc

$$p_a(a) = p_{a+1}(a) = \dots = 0,$$

$$p_0(a) = 1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^\delta, \dots p_n(a) = \left(1 - \frac{n}{a}\right)^\delta - \left(1 - \frac{n+1}{a}\right)^\delta,$$

pour  $n < a - 1$ , et

$$p_{a-1}(a) = \left(1 - \frac{a-1}{a}\right)^\delta.$$

Lindelöf prend

$$m(a) = u_0 + u_1 + \frac{1}{2 \frac{2}{a}} u_2 + \dots + \frac{1}{n \frac{n}{a}} u_n + \dots$$

donc

$$p_0(a) = 0, p_1(a) = 1 - \frac{1}{2 \frac{2}{a}}, \dots p_n(a) = \frac{1}{n \frac{n}{a}} - \frac{1}{(n+1) \frac{n+1}{a}}, \dots$$

On peut démontrer que les propriétés 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, sont vérifiées pour la sommabilité  $P$  la plus générale, ce qui dispense de les

démontrer successivement pour les quatre cas particuliers ci-dessus ou pour les nombreuses autres sortes de sommabilité qui ont été proposées.

Toeplitz et Schur ont obtenu une condition nécessaire et suffisante pour que la condition 1<sup>o</sup> soit réalisée par un procédé de sommation de la forme :

$$s = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_n p_n(a) s_n .$$

Quand cette condition de Toeplitz est réalisée, les conditions 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> sont aussi réalisées. La sommation de Toeplitz est un peu plus générale que la sommation  $P$ . Mais elle n'est plus une moyenne et perd ainsi le caractère intuitif de la sommation  $P$ . C'est sans doute pourquoi la plupart des formules de sommation proposées se trouvent être des sommations  $P$  particulières.

Ni les sommations de Toeplitz, ni les sommations  $P$  ne suffisent, au contraire, à vérifier les conditions 4<sup>o</sup> et 5<sup>o</sup> posées par Borel.

Occupons-nous d'abord de la condition 4<sup>o</sup>.

4<sup>o</sup> Si une série  $\Sigma u_n$  est sommable, on doit pouvoir grouper en un seul terme, un nombre fini quelconque,  $r$ , des premiers termes de  $\Sigma u_n$ , sans modifier, ni sa sommabilité, ni sa somme généralisée.

Pour pouvoir traiter de cette condition 4<sup>o</sup>, rappelons qu'avant de définir la sommabilité, Borel avait défini la limite généralisée d'une suite:  $x_0, x, \dots x_n, \dots$  ; c'est la limite quand elle existe, de  $e^{-a} x(a)$ , quand  $a \rightarrow +\infty$  où

$$x(a) = x_0 + x_1 a + \dots + x_n \frac{a^n}{n!} + \dots$$

est supposée convergente quel que soit  $a$ .

En vue de 4<sup>o</sup>, Borel a cru d'abord [19] avoir démontré que si  $x_0, x_1, \dots x_n \dots$  a une limite généralisée, il en est de même de la suite  $x_1, \dots x_n \dots$ . Toutefois cette démonstration est inexacte, comme l'a signalé Hardy <sup>1)</sup> en donnant le très simple exemple suivant:  $x(a) = \cos e^a$ , pour lequel la suite  $x_0, x_1, x_2, \dots$  a une limite généralisée, mais non la suite  $x_1, x_2, \dots$

---

<sup>1)</sup> Voir *The Quarterly Journal of Math.*, 35, 1903.

Mais dans son ouvrage ultérieur *Leçons sur les séries divergentes*, Borel ne reproduit pas son erreur. Au contraire, il s'exprime ainsi: « Mais l'étude des séries simplement sommables présente des difficultés analogues à l'étude des séries qui sont convergentes sans l'être absolument; nous la laisserons de côté, pour nous occuper exclusivement des séries *absolument sommables* que nous allons définir. »

Observons cependant que l'on peut sauver le premier résultat en imposant une condition supplémentaire. Plus précisément: quand la série  $u_0 + u_1 + \dots$  est sommable  $P$  (avec la somme généralisée  $s$ ), la condition nécessaire et suffisante pour que la série  $u_1 + u_2 + \dots$  soit sommable  $P$ , avec la somme généralisée  $s - u_0$ , est que la suite  $u_1, u_2, \dots$  ait pour limite généralisée zéro.

Le cas de la condition 5° est plus compliqué encore. On sait que si les séries  $\Sigma u_n, \Sigma v_n$  sont absolument convergentes au sens classique et ont pour sommes  $s$  et  $t$ , alors le produit  $st$  est égal à la somme de la série (absolument convergente)  $\Sigma w_n$  où

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

Mais quand les séries  $s$  et  $t$  sont convergentes sans être absolument convergentes, il peut arriver que la série  $\Sigma w_n$  diverge. *A fortiori*, la propriété classique ne peut être vérifiée par la sommabilité  $P$  que si l'on impose à « cette sommabilité » une nouvelle condition supplémentaire.

Nous n'essaierons pas de préciser cette condition. Car il est déjà très difficile de la déterminer pour la sommabilité exponentielle. Pour traiter cette question, il a fallu à Borel, déployer, en dehors de ses dons d'invention, une très grande habileté analytique.

Il particularise encore plus la sommabilité  $P$ , non seulement en prenant  $p_n(a) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}$ , mais en exigeant de la série  $\Sigma u_n$  qu'elle soit « absolument sommable », en ce sens que chacune des trois intégrales suivantes doit avoir un sens <sup>1)</sup>.

---

1) La condition précédente: que  $e^{-a} x(a)$  ait une limite quand  $a \rightarrow \infty$  est équivalente à la condition que l'intégrale  $\int_0^\infty e^{-a} u(a) da$  ait un sens.

$$\int_0^{+\infty} e^{-a} u(a) da, \int_0^{+\infty} e^{-a} |u(a)| da, \int_0^{+\infty} e^{-a} |u^{(r)}(a)| da$$

et ceci quel que soit l'ordre  $r$  de dérivation dans  $u^{(r)}(a)$ .

Ceci étant, Borel démontre ce que deviennent les propriétés 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup>, 5<sup>o</sup> quand on y suppose les séries données absolument sommables et quand on affirme que les séries qui en sont déduites dans ces propriétés sont absolument sommables. La propriété 1<sup>o</sup> subsiste aussi sous la forme: toute série convergente est absolument sommable et sa somme est égale à sa somme généralisée. De ces résultats, Borel déduit un théorème très général: si l'on a un polynome à une ou plusieurs variables réelles, par exemple,  $P(u, v, w)$ , si l'on y remplace  $u, v, w$  par des séries absolument sommables et si l'on développe formellement  $P(u, v, w)$  après ce remplacement, on obtient une série absolument sommable dont la somme généralisée est égale au résultat obtenu en remplaçant dans  $P(u, v, w)$ ,  $u, v, w$  par leurs sommes généralisées.

Mais c'est l'intervention des séries divergentes dans la théorie des fonctions de variables complexes qui a incité Borel à les rendre convergentes en un sens plus général et qui a fourni la plus importante de ses applications (dont nous parlerons plus loin), sa sommabilité exponentielle. Après les publications de Borel sur ce sujet, le nombre des mémoires d'autres auteurs sur les séries divergentes a décuplé.

## THÉORIE DES ENSEMBLES

Plaçons-nous dans un espace  $R$  à 1, 2, 3 ou un nombre fini de dimensions. Borel appelle ensemble bien défini et on appelle ensemble borélien (ou ensemble B) soit un ensemble élémentaire (intervalle, rectangle, cube, etc ...) soit un ensemble formé à partir d'ensembles élémentaires par la répétition, un nombre fini ou dénombrable de fois, des deux opérations suivantes:

I. Réunion d'une suite dénombrable finie ou infinie, d'ensembles disjoints déjà définis.

II. Différence de deux ensembles déjà définis dont l'un contient l'autre.