Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL

Autor: Fréchet, Maurice

Kapitel: I. Comparaison des convergences

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39967

façon précise mais qui peut s'interpréter comme suit: les nombres les plus faciles à définir à partir des entiers sont les plus isolés les uns des autres.

Dans une autre direction, Borel a donné, [50] [1]), une méthode pour résoudre le problème suivant:

Etant donnés un polynome à une ou plusieurs variables, à coefficients entiers et un nombre premier arbitraire p, trouver la puissance la plus élevée p^n de p qui divise le polynome pour toutes les valeurs entières de la variable.

Séries Numériques

I. *Comparaison des convergences*

Considérons deux séries convergentes à termes positifs $s = \Sigma u_n$, $t = \Sigma v_n$ et désignons par $r_n = s - s_n$, $\rho_n = t - t_n$ leurs restes de rang n.

Borel dit que la série s converge plus rapidement que la série t si $\frac{\rho_n}{r_n} \to \infty$ avec n. Nous dirions plutôt dans ce cas que s converge *beaucoup* plus rapidement que t. Et nous proposons d'adoucir la condition de Borel en disant que s converge plus rapidement que t quand la plus petite limite de $\frac{\rho_n}{r_n}$ est supérieure à l'unité. (Notons cependant que la définition de Borel lui a été très utile dans l'étude des fonctions complexes).

Quand on change l'ordre des termes de Σu_n, elle reste convergente avec la même somme. On voit facilement que la série, $\Sigma u'_n$, obtenue en rangeant les termes de Σu_n par ordre de grandeur non croissante, converge au moins aussi rapidement que Σu_n. Nous avons même pu donner un exemple [2]), où en

---

[1]) Nous renverrons par des numéros entre crochets aux mémoires portant le même numéro, dans la liste bibliographique figurant à la fin de l'ouvrage intitulé *Selecta*, publié en 1940 à l'occasion du Jubilé scientifique d'Emile Borel, ou dans le supplément à cette liste terminant la présente notice. Les renvois aux articles publiés dans le volume *Selecta* mentionné plus haut, p. 2, se présenteront sous la forme (S, 201) pour (*Selecta*, p. 201).

[2]) C. R. du 27 février 1961.

changeant l'ordre des termes, on peut obtenir une série moins rapidement convergente, même au sens de Borel, que $\Sigma u'_n$.

Borel s'attache particulièrement au cas où les séries considérées ont une « convergence régulière » parce que, d'après lui, ce sont les seules séries qui se rencontrent naturellement. Il montre cependant qu'on peut « fabriquer » une convergence irrégulière et, par exemple, construire une série où les sommes partielles s_n sont, pour une suite de valeurs de n, voisines de e^n et pour une autre suite de valeurs de n, voisines de e^{e^n}.

Représentons par la notation

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$$

le fait que la série s converge plus rapidement que la série t; on voit facilement que cette notation est transitive. Nous avons pu montrer par un exemple (voir la note ci-dessus) que la relation: Rap. $s \succsim$ Rap. t (exprimant qu'on n'a pas: Rap. $t \succ$ Rap. s) *n'est pas* transitive. Mais notre exemple est à convergence irrégulière. Il serait intéressant de voir si la relation redevient transitive quand on se borne aux convergences régulières.

II. *Sommabilité d'une série*

Borel a obtenu ([5]) une condition suffisante pour qu'en opérant un certain changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente, on n'altère pas sa somme: il suffit que le produit du terme général (de rang m) par le déplacement maximum des termes qui le précédent, tende vers zéro avec $\dfrac{1}{m}$.

Mais la contribution principale et très remarquable de Borel concernant les séries, c'est sa définition des séries divergentes sommables, [19], [41], [42] et l'étude de leurs propriétés.

L'égalité:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots$$

n'était traditionnellement valable que pour $|x| < 1$, c'est-à-dire quand la série était convergente au sens classique.