

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL
Autor: Fréchet, Maurice
Kapitel: Arithmétique
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39967>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

principal organisateur. C'est sans doute son contact, à cette époque, avec des problèmes de physique mathématique et de calcul des probabilités qui l'intéressa à ces questions et détermina son orientation nouvelle.

C'est à ces deux domaines qu'il va consacrer la plupart de ses recherches à partir de 1920. Toutefois, deux correctifs doivent être apportés à cette répartition sommaire. Il n'y a pas eu mutation brusque. Dès avant la guerre, on voit Borel s'intéresser de plus en plus aux questions de probabilités, en commençant par une courte note de cinq pages en 1905. La probabilité qu'un point aléatoire (dont la loi de probabilité sur le segment $(0,1)$ est uniforme) appartienne à un ensemble donné, est évidemment égale à la mesure de cet ensemble. Les travaux de Borel sur la mesure lui ont montré que certains énoncés, certaines démonstrations concernant la mesure, deviennent plus instructifs et plus simples dans le langage des probabilités. Cette remarque n'est-elle pas à l'origine de l'intérêt qu'il avait pris dès avant la guerre pour le calcul des probabilités?

Le second correctif consiste en ce qu'après la guerre de 1914-19, s'il ne s'est plus occupé exclusivement de théorie des fonctions, il ne cessa pas cependant de s'y intéresser, pour prolonger, soit ses propres recherches, soit celles qu'elles avaient suscitées.

Nous examinerons maintenant plus en détail ses recherches dans les différents domaines.

Nous suivrons l'ordre chronologique seulement pour chaque domaine scientifique pris isolément et même, dans ce cas, sans nous y conformer toujours strictement.

ARITHMÉTIQUE

Nous parlerons plus loin de la théorie de la mesure de Borel. En vertu de cette théorie, on est amené à considérer l'ensemble des nombres rationnels comme moins serré que l'ensemble des nombres irrationnels. Or on parvient par des démarches naturelles plus simplement aux premiers nombres qu'aux seconds.

On peut alors considérer comme une généralisation de cette remarque, un résultat de Borel qu'il serait long d'énoncer de

façon précise mais qui peut s'interpréter comme suit : les nombres les plus faciles à définir à partir des entiers sont les plus isolés les uns des autres.

Dans une autre direction, Borel a donné, [50]¹⁾, une méthode pour résoudre le problème suivant :

Etant donnés un polynôme à une ou plusieurs variables, à coefficients entiers et un nombre premier arbitraire p , trouver la puissance la plus élevée p^n de p qui divise le polynôme pour toutes les valeurs entières de la variable.

SÉRIES NUMÉRIQUES

I. Comparaison des convergences

Considérons deux séries convergentes à termes positifs $s = \sum u_n$, $t = \sum v_n$ et désignons par $r_n = s - s_n$, $\rho_n = t - t_n$ leurs restes de rang n .

Borel dit que la série s converge plus rapidement que la série t si $\frac{\rho_n}{r_n} \rightarrow \infty$ avec n . Nous dirions plutôt dans ce cas que

s converge *beaucoup* plus rapidement que t . Et nous proposons d'adoucir la condition de Borel en disant que s converge plus rapidement que t quand la plus petite limite de $\frac{\rho_n}{r_n}$ est supérieure à l'unité. (Notons cependant que la définition de Borel lui a été très utile dans l'étude des fonctions complexes).

Quand on change l'ordre des termes de $\sum u_n$, elle reste convergente avec la même somme. On voit facilement que la série, $\sum u'_n$, obtenue en rangeant les termes de $\sum u_n$ par ordre de grandeur non croissante, converge au moins aussi rapidement que $\sum u_n$. Nous avons même pu donner un exemple²⁾, où en

¹⁾ Nous renverrons par des numéros entre crochets aux mémoires portant le même numéro, dans la liste bibliographique figurant à la fin de l'ouvrage intitulé *Selecta*, publié en 1940 à l'occasion du Jubilé scientifique d'Emile Borel, ou dans le supplément à cette liste terminant la présente notice. Les renvois aux articles publiés dans le volume *Selecta* mentionné plus haut, p. 2, se présenteront sous la forme (S, 201) pour (*Selecta*, p. 201).

²⁾ C. R. du 27 février 1961.