

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL  
**Autor:** Fréchet, Maurice  
**Kapitel:** TROISIÈME PARTIE EXPOSÉ DES TRAVAUX SCIENTIFIQUES D'ÉMILE BOREL  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39967>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## TROISIÈME PARTIE

### EXPOSÉ DES TRAVAUX SCIENTIFIQUES D'ÉMILE BOREL

#### ORIENTATION GÉNÉRALE

Il faudrait plusieurs volumes pour seulement résumer tous les travaux de Borel. Nous nous contenterons donc ici d'exposer ses résultats les plus marquants.

Pour une étude plus complète de ses œuvres, on pourra recourir d'abord à la liste bibliographique qui figure à la fin de l'ouvrage « Selecta » imprimé chez Gauthier-Villars en 1940 (cette liste suit la reproduction des principaux mémoires de Borel avec des commentaires dus à différents auteurs). On trouvera à la fin de la présente Notice, une liste supplémentaire allant de 1939 jusqu'à la mort de Borel en 1956.

Les recherches de Borel ont porté successivement sur deux domaines différents. Depuis leur début jusqu'à la guerre de 1914-18, il s'est surtout occupé de la théorie des fonctions et des domaines associés à cette théorie. Il signale lui-même que ses découvertes les plus importantes à cette époque ont été : les définitions de la mesure, des fonctions monogènes et de la sommabilité. Ces définitions ont été préparées par l'étude attentive de cas particuliers et suivies des démonstrations, souvent difficiles, des importantes propriétés qu'elles entraînent. Par ces démonstrations, il s'égale aux plus habiles analystes. Mais, souvent, ceux-ci épuisent un sujet déjà posé avant eux et, derrière eux, l'herbe ne repousse plus. Par ses définitions, au contraire, Emile Borel ouvrait des domaines nouveaux, si riches que, malgré ses propres apports, ils suscitèrent de toutes parts des contributions nouvelles. Vint la guerre. Pendant celle-ci, Borel, après avoir participé aux combats, s'occupa du repérage du son, puis de questions variées concernant le service des inventions intéressant la défense nationale, service dont il fut le

principal organisateur. C'est sans doute son contact, à cette époque, avec des problèmes de physique mathématique et de calcul des probabilités qui l'intéressa à ces questions et détermina son orientation nouvelle.

C'est à ces deux domaines qu'il va consacrer la plupart de ses recherches à partir de 1920. Toutefois, deux correctifs doivent être apportés à cette répartition sommaire. Il n'y a pas eu mutation brusque. Dès avant la guerre, on voit Borel s'intéresser de plus en plus aux questions de probabilités, en commençant par une courte note de cinq pages en 1905. La probabilité qu'un point aléatoire (dont la loi de probabilité sur le segment  $(0,1)$  est uniforme) appartienne à un ensemble donné, est évidemment égale à la mesure de cet ensemble. Les travaux de Borel sur la mesure lui ont montré que certains énoncés, certaines démonstrations concernant la mesure, deviennent plus instructifs et plus simples dans le langage des probabilités. Cette remarque n'est-elle pas à l'origine de l'intérêt qu'il avait pris dès avant la guerre pour le calcul des probabilités?

Le second correctif consiste en ce qu'après la guerre de 1914-19, s'il ne s'est plus occupé exclusivement de théorie des fonctions, il ne cessa pas cependant de s'y intéresser, pour prolonger, soit ses propres recherches, soit celles qu'elles avaient suscitées.

Nous examinerons maintenant plus en détail ses recherches dans les différents domaines.

Nous suivrons l'ordre chronologique seulement pour chaque domaine scientifique pris isolément et même, dans ce cas, sans nous y conformer toujours strictement.

## ARITHMÉTIQUE

Nous parlerons plus loin de la théorie de la mesure de Borel. En vertu de cette théorie, on est amené à considérer l'ensemble des nombres rationnels comme moins serré que l'ensemble des nombres irrationnels. Or on parvient par des démarches naturelles plus simplement aux premiers nombres qu'aux seconds.

On peut alors considérer comme une généralisation de cette remarque, un résultat de Borel qu'il serait long d'énoncer de

façon précise mais qui peut s'interpréter comme suit: les nombres les plus faciles à définir à partir des entiers sont les plus isolés les uns des autres.

Dans une autre direction, Borel a donné, [50]<sup>1)</sup>, une méthode pour résoudre le problème suivant:

Etant donné un polynôme à une ou plusieurs variables, à coefficients entiers et un nombre premier arbitraire  $p$ , trouver la puissance la plus élevée  $p^n$  de  $p$  qui divise le polynôme pour toutes les valeurs entières de la variable.

## SÉRIES NUMÉRIQUES

### I. Comparaison des convergences

Considérons deux séries convergentes à termes positifs  $s = \sum u_n$ ,  $t = \sum \rho_n$  et désignons par  $r_n = s - s_n$ ,  $\rho_n = t - t_n$  leurs restes de rang  $n$ .

Borel dit que la série  $s$  converge plus rapidement que la série  $t$  si  $\frac{\rho_n}{r_n} \rightarrow \infty$  avec  $n$ . Nous dirions plutôt dans ce cas que  $s$  converge *beaucoup* plus rapidement que  $t$ . Et nous proposons d'adoucir la condition de Borel en disant que  $s$  converge plus rapidement que  $t$  quand la plus petite limite de  $\frac{\rho_n}{r_n}$  est supérieure à l'unité. (Notons cependant que la définition de Borel lui a été très utile dans l'étude des fonctions complexes).

Quand on change l'ordre des termes de  $\sum u_n$ , elle reste convergente avec la même somme. On voit facilement que la série,  $\sum u'_n$ , obtenue en rangeant les termes de  $\sum u_n$  par ordre de grandeur non croissante, converge au moins aussi rapidement que  $\sum u_n$ . Nous avons même pu donner un exemple<sup>2)</sup>, où en

<sup>1)</sup> Nous renverrons par des numéros entre crochets aux mémoires portant le même numéro, dans la liste bibliographique figurant à la fin de l'ouvrage intitulé *Selecta*, publié en 1940 à l'occasion du Jubilé scientifique d'Emile Borel, ou dans le supplément à cette liste terminant la présente notice. Les renvois aux articles publiés dans le volume *Selecta* mentionné plus haut, p. 2, se présenteront sous la forme (S, 201) pour (*Selecta*, p. 201).

<sup>2)</sup> C. R. du 27 février 1961.

changeant l'ordre des termes, on peut obtenir une série moins rapidement convergente, même au sens de Borel, que  $\Sigma u'_n$ .

Borel s'attache particulièrement au cas où les séries considérées ont une « convergence régulière » parce que, d'après lui, ce sont les seules séries qui se rencontrent naturellement. Il montre cependant qu'on peut « fabriquer » une convergence irrégulière et, par exemple, construire une série où les sommes partielles  $s_n$  sont, pour une suite de valeurs de  $n$ , voisines de  $e^n$  et pour une autre suite de valeurs de  $n$ , voisines de  $e^{e^n}$ .

Représentons par la notation

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$$

le fait que la série  $s$  converge plus rapidement que la série  $t$ ; on voit facilement que cette notation est transitive. Nous avons pu montrer par un exemple (voir la note ci-dessus) que la relation:  $\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$  (exprimant qu'on n'a pas:  $\text{Rap. } t \succ \text{Rap. } s$ ) n'est pas transitive. Mais notre exemple est à convergence irrégulière. Il serait intéressant de voir si la relation redevient transitive quand on se borne aux convergences régulières.

## II. *Sommabilité d'une série*

Borel a obtenu ([5]) une condition suffisante pour qu'en opérant un certain changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente, on n'altère pas sa somme: il suffit que le produit du terme général (de rang  $m$ ) par le déplacement maximum des termes qui le précèdent, tende vers zéro avec  $\frac{1}{m}$ .

Mais la contribution principale et très remarquable de Borel concernant les séries, c'est sa définition des séries divergentes sommables, [19], [41], [42] et l'étude de leurs propriétés.

L'égalité:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots$$

n'était traditionnellement valable que pour  $|x| < 1$ , c'est-à-dire quand la série était convergente au sens classique.

Mais quand  $|x| > 1$ , le premier nombre garde un sens alors que le second n'en a plus aucun. Ne peut-on généraliser le sens du mot somme de telle façon que, quand la série aurait une somme au nouveau sens, cette somme soit précisément égale au premier nombre. Avec d'autres, Borel a indiqué et étudié une réponse étendue à cette question, mais il en a tiré de nouvelles et importantes conséquences. Il précise d'abord les conditions qu'il est naturel d'imposer à tout procédé de sommation.

- 1° Toute série convergente doit être sommable avec la même somme généralisée.
- 2° Si l'on modifie un nombre fini de termes d'une série sommable,  $\Sigma u_n$ , on obtient une série  $\Sigma v_n$  qui doit être sommable et les sommes généralisées ne doivent différer que de la façon qui s'impose, c'est-à-dire d'un nombre égal à  $(u_0 + \dots + u_r) - (v_0 + \dots + v_r)$  si le dernier terme modifié est de rang  $r$ .
- 3° Si  $\Sigma w_n$  est aussi une série sommable et si  $\beta, \gamma$  sont deux nombres réels quelconques, la série  $\Sigma (\beta u_n + \gamma w_n)$  doit être aussi sommable et sa somme généralisée doit être égale à  $\beta s + \gamma t$  si  $s$  et  $t$  sont les sommes généralisées de  $\Sigma u_n$  et  $\Sigma w_n$ .

Il impose encore deux autres conditions 4° et 5° que nous énoncerons plus loin.

Si  $s_n = u_0 + \dots + u_n$  reste compris entre deux bornes quand  $n$  varie, il est naturel d'imposer à la somme généralisée d'être aussi entre ces deux bornes. Dès lors, Borel observe :

1° qu'un moyen d'y parvenir est de prendre pour somme généralisée une moyenne des  $s_n$  ;

2° mais la somme généralisée devrait se rapprocher surtout des  $s_n$  de rangs élevés. Il y a donc lieu, pour le calcul de leur moyenne, d'affecter les  $s_n$  de poids d'autant plus grands que  $n$  est plus grand. Pour réaliser cette condition au maximum, Borel propose de faire dépendre les poids d'un paramètre  $a$  de façon que la discrimination souhaitée s'accroisse quand  $a$  augmente. Plus précisément, il propose de prendre une moyenne de la forme :

$$\frac{c_0 s_0 + \dots + c_n a^n s_n + \dots}{c_0 + c_1 a + \dots + c_n a^n + \dots}$$

où les  $c$  sont des nombres  $> 0$ , le dénominateur  $\neq 0$  et où l'on fait croître  $a$  indéfiniment.

Borel abandonne alors ces généralités et choisit de prendre :

$$c_n = \frac{1}{n!}$$

de sorte que le poids de  $s_n$  sera :

$$e^{-a} \frac{a^n}{n!}$$

et la somme généralisée sera la limite quand  $a \rightarrow +\infty$ , de

$$e^{-a} \sum \frac{a^n s_n}{n!}.$$

Il montre que cette définition vérifie les conditions 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, ci-dessus.

On peut observer que ce dernier résultat peut être obtenu pour une sommation beaucoup plus générale.

Appelons  $P$  la suite de poids  $p_0(a), \dots, p_n(a) \dots$  vérifiant naturellement les conditions classiques

$$p_n(a) \geq 0, \quad \sum_n p_n(a) = 1.$$

Pour réaliser la condition supplémentaire désirée sur les poids, nous supposerons, de plus, que pour chaque  $n$  fixe :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} p_n(a) = 0,$$

car les premiers des  $p_0(a), \dots, p_n(a), \dots$  seront très petits pour  $a$  assez grand, alors que  $\sum p_n(a)$  restant égal à l'unité, les suivants ne le seront que pour  $a$  beaucoup plus grand. En résumé, nous dirons qu'une série  $\sum u_n$  est sommable  $P$  si :

A. La série

$$m(a) = s_0 p_0(a) + \dots + s_n p_n(a) + \dots$$

est convergente quel que soit  $a$  (ou au moins pour  $a$  assez grand).

B. Quand  $a \rightarrow +\infty$ ,  $m(a)$  tend vers une limite finie,  $s$ .

Alors,  $s$  sera appelée la *somme généralisée  $P$*  de  $\sum u_n$ .

A titre d'exemples où les conditions A, B, sont réalisées figurent non seulement la sommation exponentielle de Borel, où

$$p_n(a) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}$$

mais aussi plusieurs définitions connues de la sommabilité, où  $p_n(a)$  a des expressions différentes.

Par exemple, Cesaro prend dans sa définition (C, 1)  $a$  entier et

$$p_n(a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{pour } n < a \\ 0 & \text{pour } n \geq a. \end{cases}$$

Marcel Riesz prend, dans sa définition (C,  $\delta$ ),  $a$  entier et

$$m(a) = u_0 + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^\delta u_1 + \dots + \left(1 - \frac{a-1}{a}\right)^\delta u_{a-1};$$

donc

$$p_a(a) = p_{a+1}(a) = \dots = 0,$$

$$p_0(a) = 1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^\delta, \dots p_n(a) = \left(1 - \frac{n}{a}\right)^\delta - \left(1 - \frac{n+1}{a}\right)^\delta,$$

pour  $n < a - 1$ , et

$$p_{a-1}(a) = \left(1 - \frac{a-1}{a}\right)^\delta.$$

Lindelöf prend

$$m(a) = u_0 + u_1 + \frac{1}{2 \frac{2}{a}} u_2 + \dots + \frac{1}{n \frac{n}{a}} u_n + \dots$$

donc

$$p_0(a) = 0, p_1(a) = 1 - \frac{1}{2 \frac{2}{a}}, \dots p_n(a) = \frac{1}{n \frac{n}{a}} - \frac{1}{(n+1) \frac{n+1}{a}}, \dots$$

On peut démontrer que les propriétés 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, sont vérifiées pour la sommabilité  $P$  la plus générale, ce qui dispense de les

démontrer successivement pour les quatre cas particuliers ci-dessus ou pour les nombreuses autres sortes de sommabilité qui ont été proposées.

Toeplitz et Schur ont obtenu une condition nécessaire et suffisante pour que la condition 1<sup>o</sup> soit réalisée par un procédé de sommation de la forme :

$$s = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_n p_n(a) s_n .$$

Quand cette condition de Toeplitz est réalisée, les conditions 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> sont aussi réalisées. La sommation de Toeplitz est un peu plus générale que la sommation  $P$ . Mais elle n'est plus une moyenne et perd ainsi le caractère intuitif de la sommation  $P$ . C'est sans doute pourquoi la plupart des formules de sommation proposées se trouvent être des sommations  $P$  particulières.

Ni les sommations de Toeplitz, ni les sommations  $P$  ne suffisent, au contraire, à vérifier les conditions 4<sup>o</sup> et 5<sup>o</sup> posées par Borel.

Occupons-nous d'abord de la condition 4<sup>o</sup>.

4<sup>o</sup> Si une série  $\Sigma u_n$  est sommable, on doit pouvoir grouper en un seul terme, un nombre fini quelconque,  $r$ , des premiers termes de  $\Sigma u_n$ , sans modifier, ni sa sommabilité, ni sa somme généralisée.

Pour pouvoir traiter de cette condition 4<sup>o</sup>, rappelons qu'avant de définir la sommabilité, Borel avait défini la limite généralisée d'une suite:  $x_0, x, \dots x_n, \dots$  ; c'est la limite quand elle existe, de  $e^{-a} x(a)$ , quand  $a \rightarrow +\infty$  où

$$x(a) = x_0 + x_1 a + \dots + x_n \frac{a^n}{n!} + \dots$$

est supposée convergente quel que soit  $a$ .

En vue de 4<sup>o</sup>, Borel a cru d'abord [19] avoir démontré que si  $x_0, x_1, \dots x_n \dots$  a une limite généralisée, il en est de même de la suite  $x_1, \dots x_n \dots$ . Toutefois cette démonstration est inexacte, comme l'a signalé Hardy <sup>1)</sup> en donnant le très simple exemple suivant:  $x(a) = \cos e^a$ , pour lequel la suite  $x_0, x_1, x_2, \dots$  a une limite généralisée, mais non la suite  $x_1, x_2, \dots$

---

<sup>1)</sup> Voir *The Quarterly Journal of Math.*, 35, 1903.

Mais dans son ouvrage ultérieur *Leçons sur les séries divergentes*, Borel ne reproduit pas son erreur. Au contraire, il s'exprime ainsi: « Mais l'étude des séries simplement sommables présente des difficultés analogues à l'étude des séries qui sont convergentes sans l'être absolument; nous la laisserons de côté, pour nous occuper exclusivement des séries *absolument sommables* que nous allons définir. »

Observons cependant que l'on peut sauver le premier résultat en imposant une condition supplémentaire. Plus précisément: quand la série  $u_0 + u_1 + \dots$  est sommable  $P$  (avec la somme généralisée  $s$ ), la condition nécessaire et suffisante pour que la série  $u_1 + u_2 + \dots$  soit sommable  $P$ , avec la somme généralisée  $s - u_0$ , est que la suite  $u_1, u_2, \dots$  ait pour limite généralisée zéro.

Le cas de la condition 5° est plus compliqué encore. On sait que si les séries  $\Sigma u_n, \Sigma v_n$  sont absolument convergentes au sens classique et ont pour sommes  $s$  et  $t$ , alors le produit  $st$  est égal à la somme de la série (absolument convergente)  $\Sigma w_n$  où

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

Mais quand les séries  $s$  et  $t$  sont convergentes sans être absolument convergentes, il peut arriver que la série  $\Sigma w_n$  diverge. *A fortiori*, la propriété classique ne peut être vérifiée par la sommabilité  $P$  que si l'on impose à « cette sommabilité » une nouvelle condition supplémentaire.

Nous n'essaierons pas de préciser cette condition. Car il est déjà très difficile de la déterminer pour la sommabilité exponentielle. Pour traiter cette question, il a fallu à Borel, déployer, en dehors de ses dons d'invention, une très grande habileté analytique.

Il particularise encore plus la sommabilité  $P$ , non seulement en prenant  $p_n(a) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}$ , mais en exigeant de la série  $\Sigma u_n$  qu'elle soit « absolument sommable », en ce sens que chacune des trois intégrales suivantes doit avoir un sens <sup>1)</sup>.

---

1) La condition précédente: que  $e^{-a} x(a)$  ait une limite quand  $a \rightarrow \infty$  est équivalente à la condition que l'intégrale  $\int_0^\infty e^{-a} u(a) da$  ait un sens.

$$\int_0^{+\infty} e^{-a} u(a) da, \int_0^{+\infty} e^{-a} |u(a)| da, \int_0^{+\infty} e^{-a} |u^{(r)}(a)| da$$

et ceci quel que soit l'ordre  $r$  de dérivation dans  $u^{(r)}(a)$ .

Ceci étant, Borel démontre ce que deviennent les propriétés 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup>, 5<sup>o</sup> quand on y suppose les séries données absolument sommables et quand on affirme que les séries qui en sont déduites dans ces propriétés sont absolument sommables. La propriété 1<sup>o</sup> subsiste aussi sous la forme: toute série convergente est absolument sommable et sa somme est égale à sa somme généralisée. De ces résultats, Borel déduit un théorème très général: si l'on a un polynome à une ou plusieurs variables réelles, par exemple,  $P(u, v, w)$ , si l'on y remplace  $u, v, w$  par des séries absolument sommables et si l'on développe formellement  $P(u, v, w)$  après ce remplacement, on obtient une série absolument sommable dont la somme généralisée est égale au résultat obtenu en remplaçant dans  $P(u, v, w)$ ,  $u, v, w$  par leurs sommes généralisées.

Mais c'est l'intervention des séries divergentes dans la théorie des fonctions de variables complexes qui a incité Borel à les rendre convergentes en un sens plus général et qui a fourni la plus importante de ses applications (dont nous parlerons plus loin), sa sommabilité exponentielle. Après les publications de Borel sur ce sujet, le nombre des mémoires d'autres auteurs sur les séries divergentes a décuplé.

## THÉORIE DES ENSEMBLES

Plaçons-nous dans un espace  $R$  à 1, 2, 3 ou un nombre fini de dimensions. Borel appelle ensemble bien défini et on appelle ensemble borélien (ou ensemble B) soit un ensemble élémentaire (intervalle, rectangle, cube, etc ...) soit un ensemble formé à partir d'ensembles élémentaires par la répétition, un nombre fini ou dénombrable de fois, des deux opérations suivantes:

I. Réunion d'une suite dénombrable finie ou infinie, d'ensembles disjoints déjà définis.

II. Différence de deux ensembles déjà définis dont l'un contient l'autre.

Borel démontre alors deux théorèmes qui sont fondamentaux pour la théorie des fonctions :

I. Si tous les points d'un ensemble borné et fermé sont intérieurs chacun à l'un au moins des ensembles élémentaires  $F_1, F_2, \dots$ , ils sont intérieurs chacun à l'un au moins d'un nombre fini fixe ( $F_{r_1}, F_{r_2}, \dots F_{r_s}$ ) des ensembles  $F_n$ .

II. Soit  $E$  un ensemble borélien et  $\varepsilon > 0$ . On peut rassembler un nombre fini d'ensembles élémentaires  $I_1, \dots I_n$  tel que l'ensemble des points de  $E$  qui n'appartiennent à aucun des  $I_r$  et des points des  $I_r$  qui n'appartiennent pas à  $E$  soit compris à l'intérieur de la réunion d'ensembles élémentaires en nombre fini dont l'étendue totale est  $< \varepsilon$ .

#### MESURE DES ENSEMBLES

La découverte d'une définition satisfaisante de la mesure d'un ensemble a joué un rôle capital dans l'élaboration des nouvelles théories développées par Borel et ses disciples ou successeurs.

Après avoir exprimé la notion intuitive de la mesure par la longueur d'un segment rectiligne, par l'aire d'un polygone, par le volume d'un polyèdre, etc. ..., les mathématiciens se sont efforcés de traduire cette notion intuitive dans le cas plus général de la mesure d'un ensemble euclidien (en commençant par le cas d'un ensemble linéaire). Des définitions à cet effet ont été progressivement proposées, entre autres par Riemann, Cantor, Darboux et Jordan. Un nouveau progrès était nécessaire.

Chaque progrès avait consisté à estimer la mesure d'un ensemble  $E$  au moyen de la longueur totale d'un ensemble d'intervalles couvrant  $E$ . Mais on avait toujours pris ces intervalles parmi des intervalles choisis d'avance. Borel a écrit lui-même que son point de départ a été de prendre, pour chaque ensemble, des intervalles non seulement couvrant l'ensemble mais dépendant directement de cet ensemble. En prenant comme intervalles ceux qu'on obtient en divisant un segment en parties égales, Jordan arrivait à la conclusion que l'ensemble

$R$  des points d'abscisse rationnelle entre 0 et 1 avait pour mesure l'unité. En attachant, avec Borel, à chaque point d'abscisse rationnelle,  $r_n$ , un segment de longueur  $\frac{\varepsilon}{n^2}$ , on constate que  $R$  est couvert par un ensemble d'intervalles dont la longueur totale est  $\varepsilon \sum \frac{1}{n^2}$  ; sa mesure devant intuitivement être inférieure à ce total est aussi petite que l'on veut avec  $\varepsilon$ . Borel arrivait ainsi à cette conclusion qui, à l'époque, a paru surprenante, que l'ensemble des nombres rationnels, pourtant dense partout, était de mesure nulle. C'est par cet exemple que Borel a été conduit à la notion générale de mesure.

Les définitions actuellement en usage sont celles de Borel et de Lebesgue. La mesure de Borel ne s'appliquerait qu'au cas d'un ensemble dit mesurable  $B$  (on a défini plus haut, p. 52, les ensembles boréliens).

La mesure d'un ensemble mesurable  $B$  s'obtient au moyen des opérations mêmes par lesquelles il a été défini plus haut, la mesure d'un intervalle étant prise égale à sa longueur.

Lebesgue a donné une définition de la mesure d'un ensemble, qui garde un sens, que l'ensemble soit ou non mesurable  $B$ . Mais quand l'ensemble est mesurable  $B$ , il est aussi mesurable au sens de Lebesgue et a même mesure dans les deux sens.

En réalité, ce qu'il y a de curieux dans le cas de la définition de la mesure, c'est que Borel a commencé son étude de la mesure, précisément en donnant une définition des ensembles de mesure nulle <sup>1)</sup>, qui est valable pour des ensembles non mesurables  $B$ . Tout ensemble mesurable au sens de Lebesgue étant la réunion d'un ensemble mesurable  $B$  et d'un ensemble de mesure nulle, on peut dire que Borel avait donné implicitement *d'avance*, une définition des ensembles mesurables au sens de Lebesgue, équivalente à la définition de Lebesgue. On peut le voir même encore mieux et d'une façon plus directe. Car, d'après M. Denjoy, Borel écrit en substance: Si un ensemble  $E$  contient un ensemble mesurable  $B$ ,  $E_2$ , de mesure  $\alpha$ , la mesure de  $E$  est au moins égale

---

<sup>1)</sup> Rappelons qu'un ensemble linéaire est de mesure nulle quand pour tout  $\varepsilon > 0$ , tous ses points sont chacun intérieur à l'un au moins d'un ensemble de segments  $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$  dont la somme des longueurs est  $< \varepsilon$ .

à  $\alpha$ . Si  $E$  est contenu dans un ensemble  $E_2$ , mesurable  $B$  de mesure  $\beta$ , la mesure de  $E$  est au plus égale à  $\beta$ . Dans le cas où  $\beta = \alpha$  la mesure de  $E$  sera  $\geq \alpha$  et  $\leq \alpha$ . De là, à dire que si  $\beta = \alpha$  la mesure de  $E$  vaut  $\alpha$ , il n'y a qu'un pas. Lebesgue le franchit. On peut se demander pourquoi Borel n'a pas franchi ce pas lui-même. Nous pensons que cela tient à ce qu'il veut, très consciemment, éliminer les ensembles qui ne sont pas « bien définis », et que pour lui, les autres ne relevant pas d'une définition constructive, sont sans existence réelle.

Nous avons dit plus haut que si les définitions constructives sont, en effet, plus complètes, et sont nécessaires pour les applications, nous ne voyons pas de raison d'éliminer les définitions descriptives qui rendent généralement plus simples les démonstrations <sup>1)</sup>.

C'est à ce point de vue que, tout en attribuant à Borel l'antériorité complète pour la notion de mesure, nous pensons que la définition de Lebesgue, d'ailleurs donnée d'une façon différente et intéressante, a déterminé un nouveau progrès.

Toutefois, il faut observer que les propriétés des ensembles mesurables  $B$  se conservent dans toute homéomorphie, ce qui n'est pas le cas des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

C'est pourquoi en Calcul des Probabilités, les ensembles « probabilisables » sont les ensembles « boréliens » et non les ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

### *Exemples d'applications*

I. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle.

II. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $E$  soit de mesure nulle est qu'il existe une suite d'intervalles distincts  $I_1, I_2, \dots$  dont la série des longueurs est convergente et telle que tout point de  $E$  soit intérieur à une infinité des intervalles  $I_n$ .

---

<sup>1)</sup> Il faut d'ailleurs noter que l'opposition de Borel aux définitions descriptives n'a pas été totale. On lit, par exemple, en note <sup>1)</sup> de la page 48, de la troisième édition de ses *Leçons sur la Théorie des fonctions*: « Le procédé que nous avons employé revient, en réalité, à ceci: ... définir les éléments nouveaux qu'on introduit, à l'aide de leurs propriétés essentielles, c'est-à-dire de celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui vont suivre. » Il n'est fait ici aucune allusion à la « construction » des éléments nouveaux.

Soit alors  $F$  l'ensemble des points qui sont chacun intérieurs à une infinité des intervalles  $I_n$ .  $F$  comprend  $E$  et appartient à la fermeture  $\bar{E}$  de  $E$ . En particulier, si  $E$  est fermé,  $E$  est identique à  $F$ .

III. On trouvera plus loin des applications très nombreuses de la notion de mesure dans la théorie de l'intégration, dans la théorie des fonctions et dans le calcul des probabilités.

#### RARÉFACTION D'UN ENSEMBLE DE MESURE NULLE

C'est au cours de ses études des fonctions monogènes que Borel a senti la nécessité d'introduire la notion d'ensemble de mesure nulle (*avant* d'avoir défini la mesure d'un ensemble). Les mêmes études lui ont fait voir qu'il faudrait distinguer entre les différentes sortes de mesure nulle. Et cette nécessité s'est présentée à nouveau en calcul des Probabilités. Il a alors introduit la notion de « mesure asymptotique » d'un ensemble [169], dont, beaucoup plus tard, il a légèrement modifié la définition sous le nom de « raréfaction » (d'un ensemble de mesure nulle). Cette notion nouvelle a moins attiré l'attention que celle de mesure. Et pourtant, nous sommes d'accord avec Borel pour penser que l'importance de cette classification des ensembles de mesure nulle « paraît devoir être comparable à celle de la notion même d'ensemble de mesure nulle. »

Mais si Borel a même pu imaginer trois modes distincts de classification, il n'en a pas établi les relations. Et s'il a obtenu des résultats importants, c'est en partant d'hypothèses qui ne sont pas toujours nécessaires et ne sont pas toujours suffisantes. Avant donc de prolonger et d'appliquer la théorie de Borel, il y aurait lieu de la revoir et de la compléter pour la rendre plus cohérente.

Pour toutes ces raisons, nous serions heureux si ces quelques lignes pouvaient inciter de jeunes chercheurs à entreprendre une étude plus systématique et plus complète de la raréfaction et à en donner des applications.

La première idée de Borel, [S, p. 185] consiste à établir une inégalité symbolique, (à définir), entre une sorte de « grandeur »

d'un ensemble de mesure nulle,  $E$ , et la rapidité de convergence d'une série convergente à termes positifs associée convenablement à  $E$ . Nous avons vu qu'il existe au moins une suite dénombrable d'intervalles  $I_n$  qui « surcouvre »  $E$  et dont la série des longueurs  $\Sigma l_n$  est convergente.

Borel dit alors que « la mesure asymptotique de  $E$  » est « inférieure » ou égale » à  $\Sigma l_n$ . Il est revenu plus tard à la question et a perfectionné son idée primitive. Au lieu de définir la « grandeur » d'un ensemble comme inférieure ou égale à la convergence d'une série, notions qui sont des entités totalement différentes, il compare directement entre eux deux ensembles  $E, F$  de mesure nulle et ramène cette comparaison à celle des convergences de séries.

Une première façon d'opérer serait la manière suivante. Disons provisoirement d'un ensemble dénombrable  $\mathcal{T}$  d'intervalles qui « surcouvre »  $E$  et est de longueur totale finie, qu'il « majore »  $E$ . Soient alors, de même,  $\mathcal{U}$  un ensemble dénombrable d'intervalles qui majore  $F$ . On dira que  $E$  est plus *raréfié* que  $F$  si la série  $V$  des longueurs des intervalles de  $\mathcal{T}$  converge plus rapidement (voir p. 45) que la série  $U$  analogue pour  $\mathcal{U}$ .

Mais plusieurs difficultés se présentent. D'abord, le fait que l'ensemble dénombrable d'intervalles  $\mathcal{T}$  majore  $E$  est indépendant de l'ordre de ces intervalles, tandis que la rapidité de la convergence, de leurs longueurs peut en dépendre, comme nous l'avons montré ailleurs (voir p. 45). Dans la définition précédente, il ne faut pas faire intervenir  $T$ , mais une suite dans un ordre déterminé des intervalles de  $\mathcal{T}$ . Borel suppose, plus loin, que l'on a rangé la suite par ordre de longueurs non croissante. D'autre part, non seulement, il y a plusieurs suites formées avec  $\mathcal{T}$  qui majorent  $E$ , mais il n'y a pas un seul ensemble  $\mathcal{T}$  qui majore  $E$ .

Borel fait face à cette difficulté en se plaçant dans le cas où, parmi les suites  $S$  d'intervalles qui majorent  $E$ , il y en a une,  $S_0$ , qui converge plus rapidement <sup>1)</sup> que toutes les autres. En réalité, cela n'est pas possible, mais il suffit de supposer que  $S_0$  converge au moins aussi rapidement que tous les  $S$ . Quand il y a, de même, pour  $F$ , une suite  $\varepsilon_0$  d'intervalles majorant  $F$  qui con-

---

<sup>1)</sup> Expression abrégée pour dire que la série des longueurs des intervalles de  $S_0$  converge plus rapidement que la série analogue pour  $S$ .

verge au moins aussi rapidement que toute autre suite  $\varepsilon$  analogue, on dira que  $E$  est plus raréfié que  $F$  si la suite  $S_o$  converge plus rapidement que  $\varepsilon_o$ .

Borel écrit [285, p. 164] « nous discuterons plus loin les difficultés que peut présenter ce choix [celui de  $S_o$ ]; ce qui est certain, c'est qu'il y a de nombreux exemples où ce choix s'impose et ne peut être modifié; les ensembles de mesure nulle correspondants sont donc classés les uns par rapport aux autres sans ambiguïté ».

Borel traite, en effet, de nombreux exemples d'ensembles de mesure nulle auxquels il associe des suites majorantes déterminées. Ces associations sont naturelles d'un point de vue intuitif. Mais nous n'avons pas vu démontré par Borel que ces suites majorent au moins aussi rapidement (au sens de sa propre définition) que toutes les autres suites correspondantes: c'est, par exemple, ce qu'on constate, aux 11<sup>e</sup> et 12<sup>e</sup> lignes de la p. 179 [285]. Tout se passe comme si Borel, dans ses exemples, ignorait sa propre définition de l'inégalité de deux raréfactions pour y substituer une définition intuitive. C'est encore ce qu'il fait dans les pages 184 à 191 de son livre consacrées au « calcul de la raréfaction ». Il y introduit un symbolisme très ingénieux de la raréfaction. Par exemple, la raréfaction d'un ensemble  $E$  réduit à un point est symbolisée par  $\omega^{-1}$ , où  $\omega$  est le premier nombre transfini de Cantor. La raréfaction de l'ensemble  $F$  des nombres décimaux qui n'utilisent pas un chiffre donné (par exemple, 7) est symbolisée par  $\omega^{-(1-b)}$  où :

$$b = \frac{\log 9}{\log 10} .$$

Mais si  $1-b$  est bien plus petit que 1, si l'on est tenté d'écrire que  $\omega^{-1}$  est plus petit que  $\omega^{-(1-b)}$  et d'en conclure que  $E$  est plus raréfié que  $F$ , cette dernière conclusion n'est pas démontrée par Borel quand on a recours à sa première définition.

D'autre part, Borel introduit deux autres limitations qui ne nous paraissent pas indispensables. Il se restreint à l'étude des ensembles boréliens (de mesure nulle) et au cas où la convergence des séries de longueurs qu'il considère est « régulière ». Or,

comme nous l'avons montré (C. R. du 27 Février 1961), on peut obtenir un certain nombre de propriétés de la raréfaction qui subsistent quand on n'impose aucune de ces deux limitations.

Borel définit encore deux autres sortes de raréfaction. La première est la « raréfaction logarithmique ». Il considère un ensemble  $E$  de mesure nulle non dense, contenu dans  $(0, 1)$  et déterminé par la connaissance d'une infinité d'intervalles contigus  $I_i = a_i b_i$  de longueurs  $m_i$ . Il désigne par  $N(x) - 1$  le nombre des  $I_i$  dont la longueur est  $\geq x$  et par  $P(x)$  la longueur totale des  $N(x)$  intervalles à l'intérieur desquels sont les points de  $E$  (quand les  $I_i$  n'ont pour extrémité ni 0, ni 1).

Quand  $x \rightarrow 0$ , le rapport :

$$\rho(x) = \frac{\log N(x)}{\log N(x) - \log P(x)}$$

a une plus grande limite finie  $\rho$  que Borel appelle *raréfaction logarithmique* de  $E$ . A titre d'exemple, Borel considère l'ensemble de mesure nulle constitué des points dont les abscisses entre 0 et 1 ont un développement décimal n'utilisant que les nombres 2, 5, 8. Il trouve que sa raréfaction logarithmique a pour valeur :

$$\rho = \frac{\log 3}{\log 10}.$$

Or, il avait déjà symbolisé la raréfaction de tels ensembles par la notation  $\frac{\omega^\rho}{\omega}$ . Il y voit une rencontre et une confirmation de la compatibilité de ces définitions. Mais aucun rapport n'est signalé entre cette définition et sa définition primitive par comparaison de rapidité de convergence des suites majorantes.

En application, Borel étudie la « somme vectorielle »  $C = (A) + (B)$  de deux ensembles  $A, B$  compris dans  $(0, 1)$ , définie comme l'ensemble de ceux des points de  $(0, 1)$  dont l'abscisse est la somme des abscisses d'un point de  $A$  et d'un point de  $B$ .

Il donne un exemple où la somme des raréfactions logarithmiques étant égale à l'unité, la somme vectorielle a pour mesure l'unité :

Après démonstration simplifiée d'un résultat dû à Marshall Hall, Borel donne une troisième définition de la raréfaction, distincte des précédentes et qu'il appelle la *raréfaction relative minimum* ou plus brièvement la raréfaction  $R$ .

On considère un ensemble  $E$  de mesure nulle, compris dans  $(0 ; 1)$ , comprenant les extrémités 0 et 1 mais dense nulle part. On l'obtient en enlevant du segment  $(0 ; 1)$  des intervalles  $N$  contigus à  $E$  et denses dans tout intervalle. On peut supposer qu'on les place dans leur ordre de grandeur non croissante. Soit  $b_n$  la longueur du plus petit de  $n+1$  intervalles  $B$ : ceux qui restent quand on a placé  $n$  intervalles  $N$ , dont le plus petit est de longueur  $a_n$ . En posant :

$$\mu_n = \frac{b_n}{a_n + b_n}$$

Borel désigne par  $R$  le plus grand nombre inférieur à tous les  $\mu_n$ .<sup>1)</sup>

Dans le cas où l'on a  $b_n \geq a_n$ , pour tout  $n$ , on aura

$$r_n \geq \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad R \geq \frac{1}{2}.$$

Borel montre que: pour que la somme vectorielle de deux ensembles  $E, E'$  de raréfaction  $R$  et  $R'$  renferme tous les points de l'intervalle  $(0; 2)$ , il suffit que l'on ait:

$$R + R' \geq 1.$$

Plus généralement, la somme vectorielle de  $E, E'$  a une raréfaction  $R''$  telle que:

$$R'' \geq R + R'.$$

Borel, toujours novateur, a ainsi défini trois sortes de raréfactions. Mais il les a étudiées indépendamment, sans s'occuper de savoir si les définitions de l'inégalité de raréfaction qui en découlent sont compatibles.

Borel a écrit [285, p. 191]: « La théorie de la raréfaction qui complète celle de la mesure est un sujet d'étude assez vaste; je souhaiterais qu'il tentât de jeunes chercheurs. »

\*) Voir notre Note aux C. R. 1962.

Il pense évidemment aux prolongements de ses résultats. Les diverses observations que nous avons faites plus haut conduisent à penser qu'il y aurait d'abord lieu de reprendre l'exposé de ses résultats en y introduisant les compléments qu'ils réclament.

Il est regrettable que le souhait de Borel n'ait pas encore été exaucé, malgré l'importance de la notion de raréfaction, des définitions si originales de Borel et de leurs applications possibles.

(La notion de raréfaction est utile, entre autres, dans l'étude des fonctions de variable complexe et dans le calcul des probabilités).

#### FONCTIONS RÉELLES (DE VARIABLES RÉELLES)

Borel a démontré [87, p. 37] que si  $r_n(x)$  est le reste de rang  $n$  d'une série de fonctions de  $x$ , mesurables, qui converge sur un segment  $(a, b)$ , la mesure de l'ensemble des points  $x$  où  $|r_n(x)| > \varepsilon$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$  pour toute valeur positive de  $\varepsilon$ . Borel a aussi démontré [133, s, p. 158] que: étant donnée une fonction  $F(x)$ , bornée, définissable analytiquement sur un segment  $(a, b)$  et deux nombres positifs,  $\varepsilon, \alpha$ , on peut trouver un polynôme  $P(x)$  tel que la mesure  $B$  de l'ensemble des points  $x$  où  $|F(x) - P(x)| > \varepsilon$  soit inférieure à  $\alpha$ .

En faisant tendre  $\varepsilon$  et  $\alpha$  vers zéro, Borel en déduit qu'il y a une suite de polynômes  $P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$  qui converge vers  $F(x)$  *presque partout* (c'est-à-dire sauf, peut-être, sur un ensemble de mesure nulle).

Borel conclut: « Les singularités des fonctions  $f(x)$  occupent très peu de place; il est, par suite, possible, dans bien des circonstances, d'opérer comme si elles n'existaient pas. »

C'est un de ses arguments pour écarter l'étude des fonctions définies abstraitement et pour se restreindre à celle des fonctions « calculables ».

### *Intégration.*

Borel déduit des résultats précédents une définition de l'intégrale, totalement différente de celle de Lebesgue, quoiqu'elle lui soit équivalente dans le cas où la fonction intégrée est bornée.

Par définition, si  $f(x)$  est bornée et définissable analytiquement sur un segment  $(a, b)$  et par suite s'il existe une suite de polynômes  $P_n(x)$  qui converge presque partout vers  $f(x)$  sur  $(a, b)$ , l'intégrale de  $f(x)$  sur  $a, b$  sera la limite de la suite des intégrales  $\int_a^b P_n(x) dx$ .

Cette définition semble plus simple que celle de Lebesgue. Mais elle se prête moins à l'extension d'une définition de l'intégrale au cas où la variable et la fonction sont deux éléments de deux espaces de Banach, extension nécessaire dans le calcul des probabilités et ailleurs.

Une polémique s'est élevée ensuite entre Borel et Lebesgue sur la définition de l'intégrale, dans quatre articles ou notes des *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, de 1918 à 1920. Dans la première, Borel avait présenté sa définition, qu'il considérait comme constructive, contrairement à celle de Lebesgue.

Lebesgue a réagi violemment. Dans sa réclamation, à côté de remarques justes, on s'aperçoit qu'il interprète, à tort, certaines remarques de Borel de la façon qui lui est la plus défavorable (à lui, Lebesgue), et c'est ce qui lui permet, en partant de là, d'en établir le mal-fondé. Cette attaque excessive a été très pénible à Borel, qui rappelle en quels termes admiratifs il a célébré les travaux de Lebesgue.

En résumé, la priorité de Lebesgue dans la définition de l'intégrale est incontestable. Mais, d'une part, elle utilise de façon essentielle la notion de mesure introduite par Borel, et, d'autre part, elle n'enlève rien à l'intérêt de la définition, entièrement différente, de Borel. Au reste, plus tard, F. RIESZ et HAAR, en donnant chacun une définition différente des précédentes, témoignent eux-mêmes que leurs définitions, qui sont constructives, ont suivi la voie tracée par Borel.

### *Séries dérivées.*

Borel a prouvé qu'étant donnés des nombres réels arbitraires  $a_0, a_1, \dots$ , on peut toujours former une fonction de variable

réelle,  $f(x)$ , telle que pour  $x = 0$ , par exemple,  $f(x)$  ait des dérivées de tous les ordres et que pour  $x = 0$ ,  $f(x)$  et ses dérivées successives aient respectivement les valeurs  $a_0, a_1, \dots$ . On peut choisir en particulier  $a_0, a_1, \dots$  de sorte que le développement de  $f(x)$  en série de Taylor diverge plus rapidement qu'une série entière donnée d'avance.

D'autre part, Borel a montré que toute fonction de variable réelle  $\varphi(x)$ , admettant des dérivées de tout ordre dans un intervalle  $I$  donné, peut être mise sous la forme de la somme d'une série de Taylor et d'une série de Fourier, ces séries et les dérivées successives terme à terme de ces séries convergeant uniformément dans  $I$ . Et leurs sommes respectives convergent vers les dérivées correspondantes de  $\varphi(x)$ .

Ces théorèmes importants ont été obtenus par Borel en faisant usage d'une méthode ingénieuse et nouvelle pour la résolution d'un système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Avant lui, on avait cherché à résoudre un tel système en utilisant l'analogie avec les systèmes finis comportant le même nombre d'inconnues que d'équations. Borel, au contraire, observe que, du moment qu'il y a une infinité d'inconnues, on peut déterminer pour chaque équation autant d'inconnues que l'on veut: on aura toujours un nombre suffisant d'indéterminées dans les équations suivantes. De plus, Borel indique comment procéder pour ces choix successifs de valeurs des inconnues.

### *Interpolation.*

La formule d'interpolation de Lagrange permet de déterminer le polynôme  $P_q(x)$  de degré  $q$  qui est égal à une fonction donnée  $f(x)$  pour  $q+1$  valeurs données de  $x$ . D'autre part, on sait, d'après WEIERSTRASS, qu'on peut déterminer un polynôme aussi approché que l'on veut d'une fonction continue donnée. Il est alors naturel de se demander si le polynôme  $P_q(x)$  ne pourrait fournir un tel polynôme en l'égalant à  $f(x)$  pour un grand nombre  $q$  de valeurs de  $x$ .

Sans savoir que MÉRAY, puis RUNGE avaient déjà répondu par la négative, Borel a d'abord formé [86] « un exemple d'une fonction pour laquelle la formule de Lagrange, loin de donner

une approximation indéfinie, diverge lorsque  $q$  augmente indéfiniment ».

Ayant obtenu ce résultat négatif, Borel a cherché s'il ne serait pas possible de préciser le théorème de Weierstrass d'une autre façon. Il y a réussi au moyen de la formule remarquable

$$f(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_p M_{p,q}(x) f\left(\frac{p}{q}\right)$$

où l'on suppose  $0 \leq x \leq 1$ , où  $\frac{p}{q}$  est une valeur rationnelle de  $x$

et où  $M_{p,q}(x)$  est un polynôme déterminé de degré  $q$  qui est indépendant de  $f(x)$ . On peut d'ailleurs choisir parmi les expressions possibles de  $M_{p,q}(x)$ . Serge BERNSTEIN a montré qu'on pouvait prendre l'expression particulièrement simple suivante:

$$M_{p,q}(x) = C_q^p x^p (1-x)^{q-p}.$$

## FONCTIONS COMPLEXES DE VARIABLES COMPLEXES

### *Séries de Taylor*

Borel a établi ce résultat inattendu qu'il pouvait y avoir une influence de la nature arithmétique des coefficients d'une série de Taylor sur la nature analytique de sa somme. En effet, en utilisant une propriété des déterminants obtenue par M. HADAMARD, Borel a pu prouver qu'une série de Taylor à coefficients entiers ne peut représenter une fonction méromorphe que si celle-ci est une fraction rationnelle<sup>1)</sup>.

Borel a pu aussi compléter et étendre le théorème célèbre de M. Hadamard, d'après lequel: si  $\varphi(z) = \sum a_n z^n$ ,  $\Psi(z) = \sum b_n z^n$ ,  $f(z) = \sum a_n b_n z^n$  et si  $\alpha$ ,  $\beta$  sont deux points singuliers respectifs de  $\varphi(z)$  et de  $\Psi(z)$ ,  $\alpha\beta$  est un point singulier de  $f(z)$ . Par exemple, d'après Borel: si  $\varphi(z)$  et  $\Psi(z)$  sont des fonctions uniformes à singularités ponctuelles, il en est de même de  $f(z)$ ; en particulier, si  $f(z)$  et  $\Psi(z)$  sont méromorphes, il en est de même de  $f(z)$ .

<sup>1)</sup> Dans sa *Notice* (146), Borel a oublié de mentionner ce cas d'exception, qu'il avait pourtant signalé dans son mémoire original [11].

Dans une autre direction, Borel a démontré qu'en général le cercle de convergence d'une série de Taylor est une coupure de la fonction représentée par cette série. Ici, en général, peut signifier: si les coefficients de la série sont des nombres aléatoires indépendants.

### Fonctions entières

Une fonction entière étant une fonction analytique sans point singulier, WEIERSTRASS avait démontré qu'elle peut se mettre sous la forme:

$$e^{G(z)} \prod_{n=1}^{\infty} P_k \left( \frac{z}{a_n} \right)$$

où  $a_1, a_2 \dots$  sont les zéros de la fonction  $F(z)$  considérée, où

$$P_k(u) = (1-u) e^{\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^k}{k}},$$

dans lequel  $k$  est le plus petit nombre entier tel que la série

$$\sum_n \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \text{ avec } |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$$

soit convergente et où  $G(z)$  est une fonction entière.

Dans le cas où il n'existe pas de nombre  $k$  et dans celui où,  $k$  existant,  $G(z)$  n'est pas un polynome, LAGUERRE dit que la fonction  $F(z)$  est de genre infini. Dans le cas contraire, LAGUERRE appelle *genre* de  $F(z)$ , le plus grand des deux nombres  $k$  et  $q$ ,  $q$  étant le degré de  $G(z)$ . C'est le grand mérite de LAGUERRE d'avoir vu que les propriétés de  $F(z)$  dépendent de son genre plus que de  $k$  ou de  $q$  séparément.

Les résultats de LAGUERRE ont été rendus plus précis par Borel au moyen de son introduction de « l'ordre » réel de  $F(z)$ . Il appelle ainsi le nombre  $\rho$  tel que, si l'on pose  $r_n = |a_n|$ , la série:

$$\sum_n \frac{1}{r_n^\alpha}$$

soit convergente pour  $\alpha > \rho$  et divergente pour  $\alpha < \rho$  (elle peut être convergente ou divergente pour  $\alpha = \rho$ ). On voit qu'alors:

$$k \leq \rho \leq k + 1.$$

Le renseignement donné par  $\rho$  étant plus précis que celui donné par  $k$  (qui pour  $\rho$  non entier n'en est que sa partie entière), on conçoit que la connaissance de  $\rho$  ait permis à Borel d'obtenir des propriétés plus précises que pour ses prédécesseurs.

C'est un nouvel exemple d'une notion introduite par Borel qui lui permet d'obtenir des résultats nouveaux et d'ouvrir une nouvelle voie à ses émules et à ses successeurs.

Ainsi H. POINCARÉ avait prouvé que si la fonction entière  $F(z)$  est de genre  $p$ , on a

$$|F(z)| < e^{\alpha r^{p+1}}$$

où  $r = |z|$ , quel que soit le nombre positif  $\alpha$ , pour  $r$  assez grand. Borel démontre que si  $F(z)$  est d'ordre réel  $\rho$ , on a :

$$|F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

quel que soit  $\varepsilon > 0$ , pour  $|z|$  assez grand.

La série  $\Sigma \frac{1}{r_n^p}$  peut être convergente ou divergente; quand elle est convergente, Borel montre qu'on a même

$$|F(z)| < e^{\alpha r^\rho}$$

quel que soit  $\alpha > 0$ , pour  $r$  assez grand.

H. POINCARÉ avait aussi limité supérieurement les modules des coefficients  $A_m$  de la même série de Taylor qui représente une fonction entière. Borel a exprimé ce résultat sous la forme suivante :

Si  $F(z) = \Sigma A_q z^q$  est une fonction entière de genre  $p$ ,  
 $A_q (q!)^{\frac{1}{p+1}}$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{q}$ .

Soient  $M(r)$  le module maximum de  $F(z)$  pour  $|z| = r$  et  $m(r)$  le module maximum des termes  $A_q z^q$  de la série de Taylor de  $F(z)$  pour  $|z| = r$ . Borel démontre que :

$$\frac{\log M(r)}{\log m(r)} \quad (1)$$

tend vers 1 lorsque  $r$  croît indéfiniment en restant en dehors d'une suite d'intervalles tels que la longueur totale de ceux qui sont compris entre  $R$  et  $kR$  soit infiniment petite par rapport à  $R$ . (Plus tard G. VALIRON a démontré que si  $F(z)$  est d'ordre fini, le rapport (1) tend vers 1 quand  $r \rightarrow \infty$  de façon quelconque).

M. HADAMARD avait prouvé les réciproques des deux résultats de H. POINCARÉ; BOREL a ensuite précisé aussi ces réciproques au moyen de son introduction de l'ordre.

EMILE PICARD avait démontré que si, pour une fonction entière  $F(z)$ , il existe deux valeurs exceptionnelles:  $a \neq b$ , qui ne sont jamais prises par  $F(z)$ ,  $F(z)$  est une constante. La démonstration faisait usage des « fonctions modulaires ». Pendant plus de quinze ans, les mathématiciens avaient cherché en vain à simplifier la démonstration de Picard. BOREL a réussi à démontrer cette importante propriété sans faire usage de ces fonctions modulaires.

EMILE PICARD avait même démontré un théorème plus général: s'il existe deux nombres distincts,  $a, b$ , tels que la fonction entière  $F(z)$  ne soit égale à chacun d'eux que pour un nombre fini de valeurs distinctes de  $z$ ,  $F(z)$  est un polynôme. BOREL a démontré un théorème un peu plus général encore: Soient  $P(z)$  et  $Q(z)$  deux polynômes différents. Si  $F(z)$  est une fonction entière de genre fini et si les équations  $F(z) = P(z)$ ,  $F(z) = Q(z)$  n'ont chacune qu'un nombre limité de racines,  $F(z)$  est un polynôme. Le même mode de démonstration lui permet de nombreuses généralisations. Par exemple, si  $F(z)$ ,  $G(z)$  sont des fonctions entières de genre fini, alors quels que soient les polynômes  $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $R(z)$ , l'équation  $P(z)F(z) + Q(z)G(z) = R(z)$  a nécessairement un nombre infini de racines, sauf le cas exceptionnel évident où  $R(z)$  étant identiquement nul,  $\frac{F(z)}{G(z)}$  serait

une fraction rationnelle. D'après le second théorème de Picard cité ci-dessus, toute fonction entière,  $F(z)$  non polynomiale, prend une infinité de fois n'importe quelle valeur, sauf, peut-

être, une valeur exceptionnelle. Soit  $\varphi_b(r)$  le nombre des racines de l'équation

$$F(z) = b,$$

dont les modules sont inférieurs à  $r$ . D'après un théorème de Picard,  $\varphi_b(r)$  tend vers l'infini avec  $r$ . Borel a aussi précisé ce résultat [175, pp. 95-104].

La méthode employée par Borel pour donner une démonstration élémentaire du premier des théorèmes de Picard cités ci-dessus a été utilisée par Borel et par de nombreux auteurs pour prolonger ces résultats dans des directions variées. C'est en utilisant la démonstration de Borel mais en y précisant les valeurs de certaines constantes que LANDAU a démontré un résultat important et inattendu. A savoir que la connaissance des deux premiers coefficients du développement en série de Taylor d'une fonction entière, suffit pour déterminer le rayon d'un cercle à l'intérieur duquel la fonction prend certainement les valeurs 0 et 1.

Borel attache beaucoup d'importance à ce qu'il appelle la croissance régulière.

Soit  $F(z)$  une fonction entière d'ordre fini et différent de zéro et  $M(r)$  le maximum de  $|F(z)|$  pour  $|z| = r$ . Borel a d'abord démontré que le quotient:

$$\frac{\log \log M(r)}{\log r} \tag{2}$$

reste compris entre deux nombres fixes quand  $r$  varie. Borel dit alors que  $M(r)$  et  $F(z)$  sont à croissance régulière si ce quotient tend vers une limite quand  $r \rightarrow \infty$ .

Si  $a_1, a_2, \dots$  sont les zéros de  $F(z)$ , Borel dit que  $r_n = |a_n|$  a un ordre d'infinitude déterminé, quand:

$$\frac{\log n}{\log r_n} \tag{3}$$

tend vers une limite déterminée.

En combinant un théorème de Poincaré et un théorème de M. Hadamard, Borel en déduit d'abord que si les deux quotients

(2) et (3) ont chacun une limite, ces deux limites sont égales. Il démontre ensuite que, si l'un de ces quotients a une limite, l'autre a aussi une limite (alors égale à la première limite). Il observe qu'ainsi, quand la fonction entière  $F(z)$  est à croissance régulière, on peut obtenir l'expression asymptotique précise du module de ses zéros en fonction de  $n$ . Ce résultat est d'autant plus important que, d'après Borel, « toutes les fonctions entières rencontrées jusqu'ici en Analyse sont des fonctions à croissance régulière ». Cette affirmation s'est trouvée s'appliquer plus tard aux fonctions entières nouvelles découvertes par Painlevé.

Ceci n'a pas empêché Borel d'indiquer des procédés variés pour obtenir des fonctions entières à croissance irrégulière. Mais il fait observer que le caractère artificiel de ces procédés ne fait que confirmer l'assertion ci-dessus.

### *Fonctions monogènes*

Nous arrivons maintenant à l'une des découvertes les plus sensationnelles de Borel. Sa définition des fonctions monogènes et les propriétés qu'elle entraîne conduisent à un élargissement considérable de la théorie des fonctions analytiques telle qu'elle existait avant Borel.

Il explique lui-même [146, p. 39] comment il a été conduit à cet élargissement.

*Digression.* — Et c'est là l'occasion, pour nous, de signaler un trait commun aux cheminements de pensée qui ont conduit Borel à des généralisations très importantes dans des domaines variés. C'est une façon de penser très différente de celles qui ont conduit d'autres auteurs à d'autres généralisations.

Ces auteurs sont frappés de voir que certaines théories développées dans des domaines différents, dans des langages différents, offrent cependant de grandes similitudes. Ils cherchent, et certains arrivent, à dépouiller ces théories semblables de ce qu'elles ont de distinct et à les faire apparaître comme des formes particulières d'une théorie générale. C'est ainsi, par exemple, qu'ont été créées l'Analyse vectorielle, la Théorie des ensembles, celle des éléments aléatoires abstraits, etc...

Borel, lui, ne s'intéressait pas particulièrement aux généralisations. Il semble même, parfois, qu'il s'en défiait. C'est l'étude

attentive de problèmes particuliers, où il rencontre des sortes de paradoxes, qui le contraint, pour ainsi dire, à modifier les définitions qui conduisent à ces paradoxes, afin d'éviter ces derniers. Et il découvre alors, presque malgré lui, que les définitions auxquelles il arrive ont une portée plus générale.

Par exemple, dans la théorie de la mesure, il constatait que l'ensemble des nombres entre 0 et 1, et celui des nombres rationnels compris entre 0 et 1, quoique ayant des puissances différentes, avaient même mesure (même « étendue ») au sens de Jordan. Ce résultat, qui lui paraissait paradoxal, le conduisait à considérer ce second ensemble comme étant de mesure nulle. Et, ce premier pas franchi, il arrivait à sa notion générale de mesure.

Il trouvait le même genre de paradoxe, en constatant que dans l'égalité

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \dots + z^n + \dots$$

le premier membre gardait un sens quand  $z \neq 1$ , tandis que le second n'en avait que pour  $|z| < 1$ . Il cherchait à éviter ce paradoxe en attribuant une convergence généralisée et une somme généralisée au second membre, pour  $z \neq 1$ . Et il arrivait ainsi à sa sommation exponentielle des séries divergentes, création d'une portée s'étendant infiniment au-delà de ce cas particulier.

On pourrait citer d'autres exemples. Signalons au moins celui de la théorie des fonctions monogènes.

*Retour aux fonctions monogènes.* — Borel dit lui-même : « Mes recherches sur les fonctions monogènes ont eu pour origine l'étude approfondie d'une série signalée dans un mémoire... » de Poincaré :

$$F(z) = \sum_p \sum_q \sum_r \frac{\alpha^p \beta^q \gamma^r}{z - \frac{pa + qb + rc}{p + q + r}} \quad (4)$$

les entiers  $p, q, r$  prenant toutes les valeurs positives. Cette série converge évidemment en dehors du triangle  $ABC$  dont les sommets ont pour affixes  $a, b, c$ , et la somme  $y$  représente une fonction analytique uniforme. GOURSAT et POINCARÉ avaient

montré que  $F(z)$  ne pouvait être prolongée, au sens de WEIERSTRASS, à l'intérieur du triangle quand  $p, q, r$  peuvent aussi avoir des valeurs nulles (avec  $p+q+r \neq 0$ ).

Selon Borel, on n'aperçoit d'abord aucune raison pour que, si l'on exclut les valeurs nulles de  $p, q$  et  $r$  et si la fonction  $F(z)$  peut être prolongée à l'intérieur du triangle <sup>1)</sup>, ses valeurs y aient un rapport quelconque avec la série qui définit  $F(z)$  hors du triangle.

Il y avait évidemment une infinité de pôles de  $F(z)$  aussi voisins que l'on veut de tout point à l'intérieur du triangle. On en avait conclu, un peu hâtivement, à la divergence de la série en tout point intérieur au triangle.

Borel montre, au contraire, que  $F(z)$  non seulement converge en certains points du triangle  $ABC$ , mais même qu'il y a une infinité de courbes traversant  $ABC$  sur lesquelles la série  $F(z)$  converge uniformément ainsi que toutes les séries dérivées de la série  $F(z)$ . Ainsi la somme de la série  $F(z)$  représente sur ces courbes une fonction continue admettant des dérivées continues de tous les ordres. De plus, soit  $\gamma$  un petit cercle intérieur à  $ABC$ , Borel montre qu'il existe au moins un point  $M$  intérieur à  $\gamma$  tel qu'il existe au moins une droite de convergence de la série  $F(z)$  dans tout angle de sommet  $M$ . Puisque la dérivée de  $F(z)$  sur chacune de ces droites est égale à la somme de la série dérivée de  $F(z)$ , cette dérivée de la fonction  $F(z)$  est indépendante de la droite de convergence considérée. La fonction sera donc dite monogène au sens de Cauchy. L'intégrale de cette fonction sur un contour intérieur à  $ABC$ , sur lequel la série  $F(z)$  converge uniformément, sera égale, selon Borel, au produit par  $2\pi i$  de la somme des résidus des pôles intérieurs à ce contour. On obtient ainsi une généralisation d'un des théorèmes les plus importants de Cauchy, pour cette fonction  $F(z)$ .

Ayant obtenu ces résultats sur la fonction de Poincaré (4), Borel retient des définitions qui leur ont donné naissance, tout ce qui peut s'exprimer pour une fonction  $f(z)$ , qu'elle soit représentable ou non sous la forme particulière (4). Il arrive ainsi à sa conception générale de fonction monogène.

---

<sup>1)</sup> C'est-à-dire si la série n'a aucun pôle formel sur les côtés du triangle  $ABC$ .

Il considère certaines suites d'ensembles parfaits  $C_1, C_2, \dots$ , chacun intérieur au suivant et leur réunion  $C$ . Il considère une certaine classe ( $C$ ) de tels ensembles  $C$  (ainsi nommés en l'honneur de Cauchy). Une fonction  $f(z)$  sera dite monogène sur  $C$  si:

1. Elle est continue (et donc uniformément continue) sur chacun des ensembles parfaits  $C_p$ ;

2. Elle admet en tout point  $z_0$  de  $C$  une dérivée unique *au sens suivant*.  $z_0$  appartient à une infinité des  $C_p$ ; soit  $z'$  un point de l'un de ces  $C_p$ . On suppose que  $\frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0}$  a une limite quand  $z'$  tend vers  $z$  sur un de ces  $C_p$ . Si cette limite existe pour tous les  $C_p$  auxquels appartient  $z_0$ , elle sera indépendante de  $p$  puisque  $C_p$  appartient à  $C_{p+q}$ . C'est cette limite qu'on appellera la dérivée de  $f(z)$  sur  $C$ .

La nouveauté apportée par Borel, c'est que la famille de ses ensembles  $C$  est plus vaste que la famille des ensembles  $W$  sur chacun desquels on peut prolonger une fonction analytique et elle contient la famille des  $W$ . Ceci étant, toute fonction analytique au sens de WEIERSTRASS est aussi une fonction monogène sur le même ensemble, mais l'inverse n'a pas lieu.

(Pour arriver plus vite aux conséquences, nous reporterons plus loin la définition des ensembles  $C$  et  $C_p$  qui est assez compliquée.)

Borel montre qu'en généralisant la notion de fonction analytique, les fonctions monogènes conservent d'importantes propriétés des fonctions analytiques, soit littéralement, soit sous une forme un peu plus compliquée.

Par exemple, l'existence de la dérivée première (définie comme plus haut) entraîne, pour une fonction monogène, l'existence des dérivées de tous les ordres; par exemple, encore: deux fonctions monogènes qui sont égales sur un arc de courbe appartenant à leur domaine commun d'existence, soit  $\Delta$ , sont égales sur tout  $\Delta$  [S., p. 42]. Il en est de même si, en un point de  $C$ , les deux fonctions et toutes leurs dérivées sont respectivement égales, c'est-à-dire correspondent à la même série de Taylor.

Revenons, pour mieux les caractériser, aux ensembles  $C$ . Les ensembles  $W$ , sur lesquels WEIERSTRASS définissait une

fonction analytique, étaient des domaines ouverts (c'est-à-dire des ensembles d'un seul tenant et formés de points tous intérieurs à l'ensemble  $W$  considéré). Nous avons déjà dit que Borel définit ses fonctions monogènes sur certains ensembles  $C$  plus généraux que les  $W$ . Précisons que les  $C_p$  (dont la réunion constitue  $C$ ) peuvent être non denses quel que soit  $p$  et que l'ensemble complémentaire de  $C_p$  est formé de régions disjointes, en nombre fini ou non, mais dont les frontières,  $\gamma_p$ , ont une longueur totale finie  $L_p$ .

Soit  $\Gamma_p$  l'ensemble des points  $x$  de  $C$  où l'intégrale:

$$\int_{\gamma_p} \frac{|dz|}{|z-x|^{\alpha+1}}$$

est finie pour tout  $\alpha > 0$ . Soit  $f(z)$ , une fonction bornée sur chaque  $C_p$  et qui possède une dérivée finie et continue relativement à  $\Gamma_p$ .

Borel montre que  $f(x)$  sera donnée dans  $\Gamma_p$ , par

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_p} \frac{f(z) dz}{z-x}$$

et obtient ainsi une généralisation de la formule célèbre de Cauchy.

Après que Borel eut créé et étudié la théorie des fonctions monogènes, d'éminents mathématiciens comme CARLEMAN, DENJOY, MANDELBRÖJT, ..., ont approfondi et prolongé sa théorie.

*Prolongements.* — Borel avait démontré [57] qu'on peut développer  $\frac{1}{1-z}$  en série de polynômes:

$$\frac{1}{1-z} = \sum \sigma_n(z)$$

convergeant absolument en dehors de la demi-droite où  $z$  est réel et  $> 1$ . C'était un premier exemple de série de polynômes permettant de sortir du cercle de convergence d'une série de Taylor (ici  $\Sigma z^n$ ).

Borel généralise le résultat précédent. Il montre qu'il est possible de substituer à une série de Taylor ayant un rayon de convergence fini, une série de polynômes ayant pour coefficients

des combinaisons linéaires des coefficients de la série de Taylor et qui peut converger non seulement à l'intérieur du cercle de convergence de la série de Taylor mais même au-delà.

Borel a aussi découvert un autre moyen de sortir du cercle de convergence d'une série de Taylor. C'est en vue de ce moyen, qu'il avait créé la « sommation exponentielle absolue », définie plus haut (p. 51). Celle-ci lui permet d'assigner une somme généralisée à la série de Taylor, qui coïncide avec la somme ordinaire à l'intérieur du cercle de convergence mais qui existe encore jusqu'à une certaine distance de ce cercle sur tout rayon prolongée au-delà d'un point non singulier sur la circonférence du cercle. Plus précisément, la somme généralisée existe à l'intérieur du « polygone de sommabilité » de la série. Ce polygone s'obtient en menant une tangente au cercle en tout point singulier. (Ce polygone peut s'étendre dans certaines directions jusqu'à l'infini. Par exemple, pour la série  $\Sigma z^n$ , le polygone de sommabilité sera évidemment le demi-plan contenant le cercle  $|z| < 1$  et limité par la tangente au cercle au point  $z = 1$ ).

Ce résultat important dépasse ceux de WEIERSTRASS. Car Borel a formé des fonctions pour lesquelles il existe des régions où le prolongement a son sens, de la série de Taylor correspondante, est possible alors qu'il ne l'est pas par la méthode de Weierstrass du prolongement analytique.

#### EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Borel a étudié les relations entre une équation différentielle linéaire :

$$\mathcal{L}[y] \equiv L(x)y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + \dots + T(x)y' + U(x)y = 0$$

et son équation adjointe :

$$\mathcal{M}[y] \equiv (Lz)^{(n)} - (Pz)^{(n-1)} + \dots + (-1)^n Uz = 0.$$

On savait déjà, depuis LAGRANGE, que, par une suite d'intégration par parties, on arrive à la relation :

$$\int z \mathcal{L}[y] dx - \int y \mathcal{M}[z] dx = A(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z, z', \dots, z^{(n-1)})$$

où  $A$  dépend linéairement de  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  et de  $z, z', \dots, z^{(n-1)}$ .

D'où il résultait que, si l'on connaît une solution  $z$  de l'équation adjointe, l'intégration de l'équation donnée est ramenée à celle d'une équation différentielle linéaire en  $y$  d'ordre  $n - 1$ . Borel exprime géométriquement [S., p. 213] les relations entre une équation et son adjointe. On peut faire correspondre à  $\mathcal{L}[y] = 0$  une courbe de l'espace à  $n-1$  dimensions en regardant  $n$  intégrales distinctes de l'équation comme les coordonnées homogènes d'un point de la courbe dépendant du paramètre  $x$ . On pourra, de même, faire correspondre à l'équation adjointe, une autre courbe. Il résulte des relations établies par DARBOUX entre les solutions d'une équation et de son adjointe que les courbes qui leur sont attachées se correspondent dualistiquement. Borel observe qu'on pourrait prendre cette propriété géométrique comme définition de l'équation adjointe et que cette définition mettrait en évidence le fait que la relation entre les deux équations est réciproque. Mais il ajoute qu'il serait nécessaire de préciser un peu cette définition; d'abord les points correspondants des deux courbes devraient correspondre à la même valeur de  $x$ . Il faudrait ensuite multiplier les premiers membres des équations qui correspondent aux courbes pour que ces équations deviennent adjointes l'une de l'autre.

Borel cherche ensuite à quelle condition une équation est équivalente à son adjointe (cas où le recours aux solutions de l'adjointe pour intégrer l'équation donnée devient inopérant). Cette question a été d'abord étudiée par DARBOUX, qui a montré qu'entre  $n$  intégrales distinctes  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , il doit exister, alors, une relation quadratique:

$$\mathcal{C}[y] \equiv \sum_{i,k} a_{ik} y_i(x) y_k(x) = 0$$

DARBOUX avait montré que cette relation subsiste quand on y remplace les  $y_i(x)$  par leurs dérivées jusqu'à un certain ordre:

$$\mathcal{C}[y] = 0, \quad \mathcal{C}[y'] = 0, \dots$$

Les considérations géométriques par lesquelles Borel retrouve ce résultat, lui permettent, en outre, d'en démontrer la réciproque et surtout de la généraliser. Il observe d'abord que si  $2x+3$  fonctions et leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  inclusivement, vérifient une même relation quadratique homogène à coefficients cons-

tants, ce sont les solutions d'une équation d'ordre  $2n+3$  équivalente à son adjointe. Puis il généralise ce résultat, toujours par ses méthodes géométriques.

Revenant ensuite au problème posé, Borel montre que, dans le cas où  $\mathcal{C}$  n'est pas identiquement nulle (et où par suite les équations cherchées doivent être d'ordre impair), la recherche des équations identiques à leur adjointe se ramène à celle des lignes asymptotiques de la surface du second degré:

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Il montre alors géométriquement comment les solutions de l'équation  $\mathcal{L}[y] = 0$  s'expriment complètement sans signe de quadrature. Il passe alors au cas des équations  $\mathcal{L}[y] = 0$  d'ordre pair et montre qu'on peut suivre une méthode géométrique analogue à celle suivie pour le cas de l'ordre impair en faisant jouer à un complexe « linéaire » le rôle que jouait la quadrique  $\mathcal{C}(y) = 0$ . Cependant on n'arrive pas à la détermination sans intégration des courbes cherchées. La méthode permet cependant d'obtenir tout au moins pour le sixième ordre, des expressions renfermant un seul signe de quadrature et relativement assez simples.

Borel a porté aussi son attention sur le mode de croissance des solutions des équations différentielles. Il a obtenu, par exemple, ce résultat d'une précision inattendue dans des circonstances si générales: Soit une équation différentielle dont on suppose seulement qu'elle est du premier ordre, qu'elle est algébrique en  $x, y, y'$  et que l'intégrale considérée,  $y$ , ne devient infinie pour aucune valeur finie de  $x$ : on peut dès lors affirmer que  $y$  croît moins vite que  $e^{ex}$ .

L'invention de la sommabilité a permis à Borel d'obtenir un théorème remarquable qui a été depuis souvent utilisé par divers auteurs pour déterminer exactement certaines solutions irrégulières de certaines équations différentielles. C'est le théorème suivant: si une série absolument sommable vérifie formellement une équation différentielle, la somme généralisée de la série est une intégrale de l'équation.

CAUCHY a montré que l'intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles dépend de certaines fonc-

tions arbitraires dépendant de certaines variables. Borel a précisé énormément ce résultat, dans le cas d'une seule équation, en montrant que l'intégrale générale peut s'exprimer comme une fonction déterminée d'une seule fonction arbitraire dépendant d'une seule variable.

On savait depuis longtemps que la nature analytique d'une fonction dépendant d'un paramètre peut dépendre considérablement de la nature arithmétique de ce paramètre. Tel est le cas de la fonction de  $z$ ,  $z^a$ , dont la nature change selon que le paramètre,  $a$ , est entier, fractionnaire ou irrationnel. Mais la fonction  $z^a$  reste analytique.

Borel a étendu considérablement la portée de cette observation. Il a donné un exemple d'une équation aux dérivées partielles très simples :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial x^2} - \alpha^4 \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial y^2} = \psi(x, y)$$

où une intégrale périodique, généralement analytique, cesse de l'être pour certaines valeurs du paramètre  $\alpha$ . On a ainsi un exemple d'une fonction continue de deux variables réelles dont toutes les dérivées sont continues, mais qui n'est analytique en aucun point  $(x, y)$ . Cet exemple est d'autant plus frappant qu'il ne s'agit pas ici d'un cas pathologique mais d'un problème fort simple où toutes les données sont supposées analytiques.

## GÉOMÉTRIE

Rappelons d'abord que la définition et l'étude des propriétés de la mesure et de la raréfaction par Borel, si elles sont d'une importance extrême en analyse, relèvent cependant de la géométrie.

De même, Borel a étudié l'équation adjointe dont il a été question plus haut (p. 75) par des méthodes géométriques. Il y a en particulier obtenu d'importantes propositions concernant les « plans générateurs » des quadriques dans les espaces à  $n$  dimensions (qui jouent le même rôle que les génératrices des quadriques classiques).

Mais le travail le plus important réalisé par Borel en géométrie est celui qui a fait l'objet d'une question mise au concours par l'Académie des Sciences et dont Borel a obtenu le prix correspondant.

Il s'agit de l'étude des déplacements à trajectoires sphériques. Avant Borel, des solutions particulières avaient été données. Sans avoir obtenu la solution la plus générale, Borel a pu établir une classification qui lui a permis, non seulement de retrouver les solutions connues, mais d'obtenir de nombreuses solutions nouvelles et de préparer des recherches complémentaires. Pour arriver à cette classification, Borel observe que la condition imposée aux déplacements envisagés se traduit par une équation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{17} E_i T_i = 0$$

où chacun des 17 termes  $E_i$  est une « fonction de l'espace » et chacun des 17 termes  $T_i$  est une fonction du temps. Pour en obtenir la solution, on est ramené à un problème d'algèbre classique, qu'on résout en établissant  $k$  relations linéaires entre les  $E_i$ , d'où résultent  $17 - k$  relations linéaires entre les  $T_i$ . La discussion montre qu'on arrive à une classification où les solutions correspondent aux différents modes d'intersection d'un certain nombre de quadriques.

Parmi les conséquences les plus frappantes, citons ces deux-ci :

I. Il existe un mouvement où tous les points d'une cubique plane rigide décrivent des courbes sphériques, huit points situés hors du plan de la cubique décrivant aussi des courbes sphériques.

II. Etant donnés deux triangles rigides non semblables situés dans deux plans parallèles, on peut relier leurs sommets par des barres rigides et déplacer l'un des triangles de sorte que son plan reste parallèle au plan de l'autre triangle. Dans ce mouvement un quatrième point fixe dans le premier plan, reste à une distance invariable d'un quatrième point fixe dans l'autre plan.

## LES TRAVAUX DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Nous avons expliqué plus haut, p. 17, que, si c'est après la première guerre mondiale que Borel s'est particulièrement occupé des mathématiques appliquées, il s'y était intéressé déjà auparavant en raison de leur connexion avec certains de ses travaux de mathématiques pures.

Parmi les mathématiques appliquées, Borel a consacré surtout son attention et ses recherches au calcul des probabilités et à la physique mathématique.

### *I. Calcul des probabilités*

Là encore, Borel a été un initiateur en introduisant implicitement la conception de convergence presque certaine, liée à une généralisation remarquable du théorème de Bernoulli et en créant la théorie des jeux psychologiques.

*Remarques.* — L'idée a été émise que les idées les plus originales de Borel ont été publiées avant la première guerre et concernent toutes l'Analyse. Nous croyons que les deux sujets que nous venons de mentionner sont d'une originalité aussi grande et ont chacun donné lieu aussi à d'innombrables publications postérieures, par ses contemporains et successeurs.

En sortant du calcul des probabilités, les quatre définitions (non équivalentes) mentionnées plus haut, p. 58, de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle, étaient tout à fait inattendues et n'ont pourtant été développées par Borel qu'après la seconde guerre mondiale.

### *Probabilités dénombrables.*

I. Avant Borel, on avait étudié, comme lui, le cas d'une infinité dénombrable d'épreuves. Mais on s'était limité aux propriétés asymptotiques d'une probabilité dépendant d'un nombre fini croissant d'épreuves. Avec Borel s'ouvre un domaine tout nouveau dans le calcul des probabilités: celui des probabilités « dénombrables ». Et Borel réussit à trouver les valeurs exactes

des probabilités d'événements dont la réalisation dépend d'une infinité d'épreuves.

Il commence par démontrer un théorème fondamental et assez inattendu [S., p. 163].

Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  une suite d'événements indépendants et  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  leurs probabilités respectives. La probabilité pour qu'une infinité de ces événements se réalisent est égale à 0 si la série  $\Sigma p_n$  est convergente et 1 si elle est divergente.

En appelant  $A_k$  la probabilité pour que  $k$  des événements  $E_i$  se produisent, Borel a complété son théorème en montrant que si  $\Sigma p_k$  est convergente, les  $A_k$  ne sont pas nulles (au contraire de  $A_\infty$ ); si  $\Sigma p_k$  est divergente, les  $A_k$  sont nulles (alors que  $A_\infty = 1$ ).

Enfin, dans un mémoire ultérieur, [S. p. 302], Borel a étendu son théorème au cas où les  $E_i$  ne sont pas indépendants, moyennant certaines restrictions sur le sens à attribuer aux cas de convergence et de divergence.

Dans le même mémoire, Borel réalise un progrès encore plus grand. Mais, suivant une caractéristique de son esprit que nous avons signalée plus haut, ce progrès est réalisé dans des cas particuliers et il laisse au lecteur ou à ses successeurs le soin d'en comprendre et d'en formuler la portée générale. Il s'agit, d'une part, d'un théorème apportant une précision nouvelle et très importante au théorème de Bernoulli et, d'autre part, de la conception d'une nouvelle sorte de convergence: la convergence presque certaine (dite aussi presque sûre).

Borel ne considère explicitement que le cas où l'on étudie la fréquence  $\varphi_n$ <sup>1)</sup> d'un chiffre déterminé dans les  $n$  premiers chiffres d'un nombre  $N$  pris au hasard (en supposant que la probabilité de l'apparition d'un chiffre déterminé est indépendante de ce chiffre et par suite, égale à  $\frac{1}{10}$ ). Quand  $n$  croît, la convergence de

$\varphi_n$  vers  $\frac{1}{10}$  est un événement fortuit, Borel démontre que la probabilité de cet événement est égale à l'unité. Mais le raisonne-

---

1) La fréquence d'un événement dans  $n$  épreuves est le rapport  $\frac{r_n}{n}$  où  $r_n$  est le nombre de répétitions de l'événement dans les  $n$  épreuves.

ment de Borel est général et permet d'énoncer explicitement le résultat suivant :

Soient  $f_n$  la fréquence de  $n$  épreuves indépendantes d'un événement  $E$  de probabilité constante  $p$ . Alors la probabilité que  $f_n$  tende vers  $p$  est égale à l'unité.

On voit immédiatement qu'on a là un énoncé à la fois plus frappant et plus précis que celui du théorème de Bernoulli. D'après ce dernier, il est très probable que  $|f_n - p|$  soit petit quand  $n$  est grand, mais il n'en résulte pas que  $f_n$  tende vers  $p$ . Au contraire, si l'on admet le théorème de Borel, le théorème de Bernoulli en résulte, c'est-à-dire que si  $\varepsilon$  est un nombre positif arbitraire, la probabilité pour que  $|f_n - p| < \varepsilon$  tend vers l'unité quand  $n \rightarrow \infty$ . Le théorème de Bernoulli est donc une simple conséquence d'un théorème plus général, celui de Borel et une conséquence moins simple à saisir — et pour cette raison, souvent mal interprétée — du théorème de Borel.

On n'a malheureusement pas encore pris l'habitude de considérer le théorème de Borel sous cet aspect. Avant Borel, le théorème de Bernoulli était un théorème fondamental. Après Borel, c'est le théorème de Borel qui doit lui être substitué.

La démonstration de Borel est analytique, mais il avait indiqué qu'on pourrait donner aussi une démonstration géométrique de son théorème. Cette démonstration géométrique a été explicitement obtenue, plus tard, par F. Hausdorff.

La démonstration analytique de Borel est assez compliquée. Une démonstration à la fois plus simple et d'une portée plus générale a été donnée plus tard par Cantelli. Mais on doit noter que la démonstration de Borel a l'avantage de se prêter mieux à une étude plus précise du comportement de la fréquence.

Nous avons aussi signalé plus haut une autre caractéristique du théorème de Borel : c'est qu'il introduit (encore une fois implicitement) une espèce nouvelle de convergence : « la convergence presque certaine ».

Généralisant la circonstance qui se présente dans le théorème de Borel, on est partout convenu maintenant de dire qu'un nombre aléatoire  $X_n$  converge presque certainement vers un nombre aléatoire  $X$  quand la convergence de  $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$

vers  $X$  est un événement presque certain, c'est-à-dire dont la probabilité est égale à l'unité.

On peut dire que par la précision donnée au théorème de Bernoulli et par l'introduction de la convergence presque certaine, Borel s'est placé au premier rang des successeurs de Laplace et de Poincaré.

II. Poursuivant son étude des « probabilités dénombrables », Borel considère [S., p. 131] les lois de probabilité des quotients incomplets,  $A_n$ , de la fraction continue

$$X = \frac{1}{A_1 + \frac{1}{A_2 + \dots}}$$

représentant un nombre incommensurable  $X$  compris entre 0 et 1 et dont la loi de probabilité est uniforme.

En appelant  $\varphi(n)$  une fonction positive croissante de  $n$ , Borel trouve que :

I si la série  $\Sigma \frac{1}{\varphi(n)}$  est convergente, la probabilité pour que l'on ait

$$A_n < \varphi(n)$$

à partir d'un certain rang est égale à un ;

II si cette série est divergente, il y a une probabilité égale à un pour que l'on ait

$$A_n > \varphi(n)$$

à partir d'un certain rang.

En d'autres termes, il est infiniment probable que la croissance asymptotique de  $A_n$  est comprise entre celle de toute fonction  $\varphi(n)$  telle que la série  $\Sigma \frac{1}{\varphi(n)}$  soit convergente et celle de toute fonction  $\varphi(n)$  telle que cette série soit divergente.

Dans le même mémoire, Borel exprime une opinion qu'il a souvent répétée, à savoir qu'une « probabilité nulle ou extrêmement petite doit être considérée comme équivalente à l'impossibilité ». C'est une opinion qui avait déjà été formulée, longtemps auparavant, par Buffon, puis par Cournot. Buffon et Borel ont

même chiffré, chacun de leur côté, ce qu'ils appellent « extrêmement petite ». Borel en a donné une image concrète très frappante, le « miracle des singes dactylographes ». Peut-on concevoir que si un million de singes travaillaient dix heures par jour sur un million de machines à écrire et si leur production était successivement reliée en volumes, l'ensemble des volumes obtenus au bout d'un an se trouverait renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes les langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde? Il n'est douteux pour personne qu'un tel événement doit être considéré comme impossible, bien que sa probabilité si elle est extraordinairement petite, ne soit pas rigoureusement nulle.

### *Théorie des jeux stratégiques.*

Sortant de la théorie pure pour aller vers les applications (du calcul des probabilités), Borel s'est encore ici montré un novateur dont les idées et les résultats ont donné lieu à un nombre énorme de travaux.

Jusqu'à lui — sauf dans des problèmes très particuliers dont aucune généralisation n'était entreprise — l'étude des jeux de hasard en calcul des probabilités s'était bornée aux cas où chacun des événements considérés avait une probabilité déterminée: jeu de pile ou face, jeu de dés, etc. L'intelligence, le caractère des joueurs n'y avaient aucune part. Il n'en est pourtant rien dans la plupart des jeux en usage: jeu de dames, jeu d'échecs, jeu de bridge, etc. ... On doit alors admirer avant tout que Borel ait eu l'audace de vouloir établir une théorie générale des jeux psychologiques et de concevoir la possibilité d'y parvenir en appliquant le calcul des probabilités à des hypothèses convenablement choisies. Il a choisi, à cet effet, des hypothèses plausibles, et a pu déterminer dans des cas particuliers les conséquences de ces hypothèses. Ce n'est pas tout; il a aperçu, dès sa première publication sur ce sujet, que le problème posé par lui avait des applications dans des domaines variés: économie politique, stratégie, psychologie, etc. ...

Pour éclairer ce qui précède, il nous faut, maintenant, préciser les hypothèses de Borel. Contrairement à certains esprits, nous ne pensons pas que ces hypothèses soient inéluctables et

d'ailleurs elles ont été discutées. Mais ce sont des hypothèses qui, d'une part, sont plausibles et qui, d'autre part, se prêtent à un traitement mathématique du problème, deux qualités qui sont très loin d'être toujours conciliables. L'un des principaux mérites de Borel est d'avoir montré qu'un tel choix d'hypothèses est possible, même si l'on n'admet pas qu'il soit nécessairement le seul ni le meilleur possible.

### *Les hypothèses de Borel.*

A chaque coup à jouer, un joueur se trouve dans une circonstance déterminée dont certains éléments lui sont connus; par exemple, au jeu de cartes, l'ensemble des cartes qu'il a dans la main et la suite des coups précédents. Sur la base de ces données et sur l'hypothèse qu'il fait sur la psychologie des autres joueurs, il décide son coup. Borel élimine cette hypothèse<sup>1</sup> et considère l'ensemble des données et du choix du joueur. Il y a, dans la plupart des jeux, un nombre fini, quoique très grand, de tels ensembles. Au cours d'un jeu, un joueur adopte successivement un nombre fini de tels ensembles et caractérise ainsi sa « méthode de jeu ». Il y a un nombre fini de méthodes de jeu possibles:  $C_1, C_2, \dots, C_n$  et chaque joueur adopte nécessairement l'une d'elles à chaque coup. Mais il y a au début du jeu (par exemple, quand on distribue les cartes) ou au cours du jeu, une intervention du hasard. Si donc, en considérant le cas de deux joueurs,  $A$  et  $B$ , le joueur  $A$  adopte la méthode de jeu  $C_i$  et le joueur  $B$  la méthode  $C_k$ , c'est le calcul des probabilités qui permettra de calculer la probabilité  $\pi_{ik}$  pour que  $A$  gagne finalement. On a alors à chercher d'abord s'il existe une méthode de jeu  $C_i$  pour  $A$ , telle que  $\pi_{ik}$  soit positif quel que soit  $k$  (c'est-à-dire quelle que soit la méthode  $C_k$  adoptée par  $B$ ). Alors  $A$  aurait intérêt à adopter la méthode  $C_i$  (ou l'une des méthodes  $C_i$  pour lesquelles  $\pi_{ik}$  est positif quel que soit  $k$ ).

Borel se place dans le cas où une telle méthode de jeu n'existe pas et il se demande s'il n'est pas possible de jouer d'une manière avantageuse en variant son jeu. « Si l'on veut formuler une règle précise pour varier le jeu, cette règle ne faisant intervenir que

---

1) Voir page suivante, la citation où Borel énonce cette élimination, qui évidemment, éloigne un peu la théorie de la réalité.

les faits observés et non pas des remarques psychologiques sur le joueur auquel on est opposé, cette règle équivaut forcément à un énoncé tel que le suivant: la probabilité pour que, en un moment donné du jeu,  $A$  adopte, pour fixer sa conduite à ce moment, le code  $C_i$  est  $p_i$ ; la probabilité analogue pour  $B$  pourra être désignée par  $q_k$  et, en désignant par  $n$  le nombre de codes qui subsistent, on a

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \sum_{k=1}^n q_k = 1'' \quad (1)$$

La probabilité de gain de  $A$  est donc

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \pi_{ik} p_i q_k.$$

Borel se place alors, pour simplifier, dans ce qu'il appelle le cas symétrique, caractérisé par l'égalité  $\pi_{ii} = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire que si les deux joueurs adoptent la même méthode de jeu, leurs chances de gagner sont égales. Il observe que dans la plupart des jeux de cartes où l'un des joueurs joue le premier, ces deux chances ne sont pas égales, mais qu'elles le deviennent si le jeu consiste en deux parties où l'un des joueurs commencera le jeu dans la première et l'autre dans la seconde. Comme on a évidemment

$$\pi_{ik} + \pi_{ki} = 1$$

ou

$$\pi_{ik} = \frac{1}{2} + \alpha_{ik}, \quad \pi_{ki} = \frac{1}{2} + \alpha_{ki}$$

avec  $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$ , on aura

$$P = \frac{1}{2} + \alpha,$$

$$\text{avec } \alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{jk} (p_i q_k - p_k q_i).$$

Tout ce qui précède figure dans la première Note de Borel.

Dans cette même Note, Borel prouve que, dans le cas où  $n = 3$ , « il est facile de trouver des nombres positifs  $p_1, p_2, p_3$  vérifiant (1) et tels que  $\alpha$  soit nul et donc  $P = \frac{1}{2}$  quels que soient les nombres  $q_1, q_2, q_3$ . Il est donc possible d'adopter une manière de jouer permettant de lutter avec des chances égales contre tout joueur ».

Dans sa dernière Note sur les jeux, Borel procède autrement mais ramène au même problème mathématique. Au lieu de partir de la probabilité pour le joueur  $A$  de gagner, il part du gain moyen de  $A$ , soit  $g_{ik}$  quand  $A$  adopte le code  $C_i$  et  $B$  le code  $C_k$ . La symétrie du jeu entraîne

$$g_{ik} + g_{ki} = 0.$$

Quand les codes  $C_i$  et  $C_k$  ne sont adoptés par  $A$  et  $B$  qu'avec les probabilités  $p_i$  et  $q_k$ , le gain moyen de  $A$  sera

$$G = \sum g_{ik} p_i q_k.$$

Par une méthode différente de la précédente, Borel montre alors que, pour  $n = 3$  et  $n = 5$ , on peut trouver des probabilités  $q_k$  telles que  $G$  soit nul quels que soient les  $p_i$ .

Le problème de démontrer qu'il n'en est pas ainsi avait été d'abord prouvé insoluble pour  $n = 3$  par Borel. Dans ses Notes successives, il lui avait paru d'abord soluble pour  $n = 5$ ; puis ayant pu prouver qu'il était insoluble pour  $n = 5$ , il avait à ce moment pensé qu'il était soluble pour  $n = 7$ . Enfin, il termine sa dernière Note en écrivant que ce même problème « insoluble pour  $n = 3$  et  $n = 5$  me paraît également insoluble pour  $n = 7$ . Il serait intéressant, soit de démontrer qu'il est insoluble en général, soit d'en donner une solution particulière ».

Il est clair que l'évolution de sa pensée le conduit à croire que, quel que soit le nombre  $n$  des manières de jouer, on peut choisir les probabilités  $q_k$  pour  $B$  de choisir les codes  $C_k$  de sorte que, quelles que soient les probabilités  $p_i$  pour  $A$  de choisir les codes  $C_i$ , la moyenne du gain total de  $A$  et celle du gain total de  $B$  soient toutes deux nulles.

Toutefois, on doit constater que Borel n'a pas démontré qu'il en était ainsi quel que soit  $n$  et qu'il n'a même pas,

contrairement à son habitude, exposé en détail dans un mémoire, les Notes qui résumaient ses résultats dans les C.R.

On peut trouver l'explication de ces faits dans l'évolution de ses activités. Borel, pendant une certaine période, a, en effet, été pris de plus en plus par son activité politique (voir p. 12). D'abord maire de sa ville natale, puis conseiller général de son département, il a été élu député en 1924 et l'est resté jusqu'en 1936. Dans l'intervalle, il a même été quelques mois, ministre de la Marine et nous avons même eu l'honneur de le remplacer comme professeur et de le dispenser ainsi de faire ses cours à la Faculté des Sciences. De sorte qu'après avoir posé le problème et l'avoir résolu dans les cas les plus simples, Borel n'a plus eu le temps d'étudier en détail le problème mathématique qui restait à résoudre.

C'est après la dernière Note (de 1927) de Borel que von Neumann en 1928, adoptant exactement les mêmes hypothèses, a réussi à démontrer un théorème (dit du minimum — maximum) équivalent au théorème de Borel, dans le cas général de  $n$  quelconque. Puis, associé avec l'économiste Morgenstern, il en a tiré une théorie économique générale.

La théorie de von Neumann-Morgenstern a eu un retentissement considérable, tandis que les Notes de Borel restaient ignorées. C'est pourquoi nous avons décidé de rappeler l'antériorité de Borel et nous avons publié dans « *Econometrica* » en 1953, une excellente traduction en anglais, réalisée par M. Savage des trois Notes les plus importantes de Borel, avec un commentaire. Nous avons auparavant communiqué ce commentaire à von Neumann dont la réponse a été publiée dans le même numéro d'*Econometrica*. Tout naturellement von Neumann a réagi vigoureusement, alléguant que rien ne pouvait être retenu de la théorie de Borel, avant sa propre démonstration du théorème général. D'après lui « en 1921 et ultérieurement Borel suppose que le théorème est ou risque d'être faux ». Mais si cette assertion est rigoureusement exacte, elle doit être complétée par la citation de Borel faite plus haut, montrant que Borel a fini par pencher vers l'exactitude générale du théorème.

Von Neumann ajoutait « j'avais moi-même élaboré mes idées sur le sujet avant d'avoir lu ses Notes (les Notes de Borel) ».

Mais en tout cas, il en avait lu une avant de publier son premier Mémoire (de 1928) où il cite lui-même cette Note de Borel.

Si notre publication dans *Econometrica* avait révélé à beaucoup l'antériorité de Borel, elle n'avait pas atteint tous les intéressés. C'est pourquoi, d'accord avec M. Guitton, rédacteur de la Revue d'Economie politique, nous avons publié, dans cette revue en 1959, à nouveau, mais cette fois en français, dans le texte original, les trois Notes de Borel et notre commentaire ainsi que la traduction du commentaire en anglais de von Neumann.

Dans les innombrables publications sur les jeux psychologiques et sur leurs applications à l'Econométrie, il ne sera plus admissible d'ignorer l'antériorité de Borel.

Malheureusement, tel n'est pas encore le cas. En 1959, dans une Notice, d'ailleurs très intéressante sur le grand mathématicien que fut von Neumann, l'auteur commence ainsi :

« Theory of games.

The essential ingredients of von Neumann's theory of games are already to be found in his 1928 paper . . .

The first application of game theory to an economic problem was given in a 1937 paper ».

Et sur ces deux sujets, le nom de Borel n'est même pas mentionné. Or :

1<sup>o</sup> le premier mémoire de von Neumann sur la théorie des jeux a été publié après la dernière Note de Borel sur le même sujet, et en connaissance de la théorie de Borel, qu'il cite. Les hypothèses à la base de la théorie de von Neumann sont en outre identiques à celles de Borel.

2<sup>o</sup> Borel, et non von Neumann, a été le premier à signaler que la théorie des jeux est applicable, non seulement à l'Economie politique, mais aussi à l'art militaire, à la psychologie, etc.

Ceci dit, il faut reconnaître que von Neumann et Morgenstern ont très bien développé l'application de la théorie des jeux à l'Economie politique.

## II. *Physique mathématique*

Sans aucun doute, les activités exercées par Borel pendant la première guerre, — activités qui l'ont amené à étudier des problèmes concrets — ont conduit Borel à s'intéresser de plus en plus à la Physique. Mais cet intérêt s'était déjà manifesté auparavant et pour des raisons toutes différentes.

Dès 1906, Borel s'occupe de la théorie cinétique des gaz et de la loi de Maxwell correspondante, après avoir constaté combien sont insuffisantes les diverses démonstrations de cette loi. Pour y apporter la rigueur [96], il prépare le lecteur en étudiant d'abord la répartition des petites planètes et montrant la nécessité de donner un sens aux positions antérieures du problème. Dans le cas des gaz, la discussion est un peu plus compliquée, mais elle l'amène encore à rejeter les formes du problème antérieurement admises et à leur substituer un problème qui, après une réduction que nous allons expliquer, prend la forme  $G$  énoncée plus loin.

On part d'hypothèses précises sur les molécules du gaz, qui conduisent à ramener l'étude du gaz à celui du mouvement de  $n$  sphères égales se mouvant dans un certain domaine où elles peuvent se réfléchir à la suite d'un choc, soit sur les parois, soit entre deux d'entre elles. Borel ramène le mouvement des  $n$  centres des  $n$  sphères dans l'espace usuel à 3 dimensions au cas du mouvement d'un point  $P$  dans un domaine  $D$  de l'espace à  $3n$  dimensions, où les lois de la réflexion sur les parois sont analogues aux lois classiques. En vertu de la conservation de l'énergie, la vitesse de  $P$  est constante. Soit  $\overline{OV}$  le vecteur d'origine fixe  $O$ , équipollent à cette vitesse.  $V$  se déplace sur une sphère  $S$ . Borel énonce alors ainsi la forme finale,  $G$ , qu'il donne au problème.

Il admet que la position de la paroi et les données initiales sont des éléments aléatoires dont les lois de probabilité sont connues. Le problème est de déterminer la probabilité que le point  $V$  soit dans un domaine élémentaire  $d\omega$  de la surface de  $S$  à une époque  $t$  comprise entre des limites connues, que l'on fera ensuite croître indéfiniment.

Borel démontre alors que la probabilité limite cherchée est proportionnelle à  $d\omega$ , c'est-à-dire que toutes les directions de  $OV$  sont également probables (pour un temps suffisamment long).

En précisant le calcul, Borel retrouve enfin la loi de Maxwell. D'après lui, ce calcul fournit la plus simple des démonstrations rigoureuses de cette loi.

Dans sa conférence au Rice Institute [S., p. 317], Borel étudie plusieurs aspects du passage du fini à l'infini en mathématique et observe le parallélisme avec le problème de savoir si la Nature est discontinue ou continue, ce qui entraîne la question de la légitimité en Physique des théories moléculaires.

Borel note d'abord que c'est souvent « une simplification en Mathématiques que de remplacer par l'infini un nombre fini très grand ». Il en cite plusieurs exemples. Limitons-nous au premier qui conduit à constater « que le calcul des intégrales définies est souvent plus simple que celui des formules sommatoires ». Mais il étudie aussi le passage inverse de l'infini au fini, qui correspond en physique à l'introduction des théories moléculaires. Il observe alors que « les considérations basées sur l'existence des molécules n'y jouent qu'un rôle auxiliaire ».

« La théorie moléculaire a donc été un guide précieux pour l'analyste en lui suggérant la marche à suivre pour étudier les équations du problème, mais elle est éliminée de la solution définitive ».

On pourrait encore préciser ces réflexions. Il est exact que, pendant longtemps, les mathématiciens ont abordé les problèmes où figuraient des variables continues en remplaçant celles-ci par des variables discontinues et passant à la limite. Comme le dit Borel, cette façon de procéder permettait de pressentir la forme de la solution. Mais pour établir celle-ci, il fallait établir l'existence et la forme d'une limite et c'était là souvent un problème très difficile. Depuis lors, la tendance s'est faite jour, de plus en plus, d'éviter cette difficulté en cherchant à préciser dans la discussion du cas discontinu tout ce qui gardait un sens, que le nombre des valeurs des variables soit fini ou non. On arrive ainsi à une solution s'appliquant directement au problème posé dans le cas continu. C'est ainsi que l'étude des équations intégrales symétriques faite par Hilbert en résolvant le problème difficile

d'un passage à la limite s'est révélée à la fois plus simple et plus élégante dans l'étude directe de E. Schmidt. Un exemple analogue est fourni par la démonstration de Fredholm de l'existence d'une solution de son équation intégrale. Sa marche est analogue à celle de la solution d'un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues; mais si elle s'est trouvée ainsi guidée par l'étude de ce problème, à aucun moment sa démonstration ne fait intervenir le passage à la limite du cas d'un nombre fini de variables à un nombre infini.

Borel revient au cas discontinu en observant qu'il « peut être intéressant de se proposer, au point de vue purement mathématique, l'étude directe de fonctions ou d'équations dépendant d'un nombre fini de variables, mais très grand ». Il se trouve alors ramené à une question qui lui tient à cœur et qu'il a souvent agitée sous différentes formes:

« La première difficulté qui se présente lorsqu'on veut étudier des fonctions d'un très grand nombre de variables, est la définition précise d'une telle fonction, j'entends par là une définition *individuelle*, permettant de distinguer la fonction définie de l'infinité des fonctions analogues ». Borel se demande « si l'on peut considérer comme donné » un ensemble de nombres dont « la vie d'un homme ne suffirait à en énumérer une faible partie ». Pour lui, un tel ensemble peut être considéré comme déterminé « par la connaissance d'une formule assez simple pour être effectivement écarté, tandis qu'il n'est pas possible d'écrire effectivement autant de nombres distincts... ». Il peut être aussi déterminé en considérant l'ensemble comme l'ensemble des valeurs que peut prendre un nombre aléatoire dont la loi de probabilité est donnée.

Ces considérations sont tout à fait justifiées quand il s'agit de définitions et d'applications « constructives ». S'il s'agit de définitions et d'applications « descriptives », la situation est différente. La démonstration, par exemple, que le terme général d'une série convergente tend vers zéro quand son rang croît indéfiniment, nous paraît correcte sans que ce terme général soit représenté par une formule simple ou qu'il relève du calcul des probabilités et même si la vie d'un homme ne suffisait pas à énumérer une faible partie de la suite des termes de la série.

Cette observation n'enlève rien à l'intérêt de la distinction que fait Borel des ellipsoïdes « très irréguliers » parmi les ellipsoïdes dans un espace à un très grand nombre de dimensions. Borel appelle ainsi ceux pour lesquels la moyenne des inverses des quatrièmes puissances des longueurs des axes n'est pas du même ordre de grandeur que le carré de la moyenne des inverses des carrés des longueurs des axes. D'après Borel, il convient, pour obtenir des résultats utiles sur les ellipsoïdes, d'exclure ces ellipsoïdes très irréguliers. « Lorsqu'un ellipsoïde n'est pas très irrégulier, plusieurs de ses propriétés permettent de l'assimiler à une sphère ». . .

« Une figure qui dépend d'un nombre extrêmement grand de paramètres ne peut être considérée comme numériquement déterminée que si ses paramètres sont définis au moyen de données numériques assez peu nombreuses pour nous être accessibles ».

Plus loin, Borel développe les raisons pour lesquelles il convient souvent de remplacer une variable ayant un nombre de valeurs fini mais très grand par une variable ayant une suite infinie mais énumérable de valeurs. Et ceci, plutôt que par une variable continue comme on faisait en physique mathématique classique où l'on supposait la matière continue.

Une autre des suggestions mathématiques qu'offrent les théories moléculaires concerne les fonctions d'une variable complexe. Pour le montrer, Borel considère le potentiel d'un système formé d'une suite infinie de points isolés, la masse concentrée en chacun de ces points étant finie ainsi que la masse totale. Pour simplifier, limitons-nous au cas d'un système plan et, par suite, d'un potentiel dit logarithmique. Supposons, de plus, que les masses sont réparties en un ensemble de points qui, dans une certaine région, est partout dense. Mais « l'hypothèse que les masses attirantes sont de simples points matériels sans dimension est difficile à accepter au point de vue physique. On est ainsi conduit à disperser cette masse dans un petit cercle ayant le point pour centre sans changer le potentiel à l'extérieur de ce cercle qu'on nommera le cercle d'action de son centre. On répartit les masses et les densités de telle manière que la densité s'annule ainsi que ses dérivées sur le périmètre du cercle; elle est ainsi non seulement finie mais continue ».

Borel démontre que, par une répartition convenable de la densité, on arrive à un résultat qui peut étonner. On aurait pu craindre qu'il n'y eût pas de place libre entre des points matériels tellement serrés par hypothèse. En fait, Borel démontre « qu'il y a des points en lesquels se croisent une infinité de droites sur lesquelles la densité est nulle; en ces points, la fonction potentielle logarithmique satisfait à l'équation de Laplace ».

Borel passe alors à la situation correspondante dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Soit une fonction à pôles denses dans une région; on peut définir dans cette région « une infinité de droites, se croisant dans tous les sens, la fonction admettant des dérivées continues sur ces droites et la dérivée ayant la même valeur dans toutes les directions en chacun des points de croisement de ces droites. Nous retombons ainsi sur la théorie des fonctions monogènes résumée plus haut (p. 69), mais reliée ici à une théorie physique moléculaire. C'est une extension magnifique de la théorie des fonctions analytiques grâce à laquelle Borel a pu dépasser l'extension précédente due à Weierstrass.

A la fin du même mémoire, Borel survolant son sujet, s'exprime ainsi: « C'est toujours au contact de la Nature que l'Analyse mathématique s'est renouvelée, ce n'est que grâce à ce contact permanent qu'elle a pu échapper au danger de devenir un pur symbolisme, tournant en rond sur lui-même ». On ne saurait mieux dire, pourvu qu'on complète cette assertion. Les mathématiciens sont, en effet, nécessairement amenés à réaliser un travail interne, consistant en une refonte continue de l'armature des mathématiques, pour les simplifier et les harmoniser. Il y a une tendance vers l'abstraction qui semble éloigner les mathématiques de la Nature, mais qui, en réalité, n'a pour but que de dégager l'essentiel et le commun dans les problèmes, généralement particuliers, posés par la Nature et ainsi de rendre leurs solutions applicables à de nouveaux problèmes posés par la Nature.

### *L'irréversibilité.*

Depuis Loschmidt en 1876, on fait souvent la remarque suivante: les équations de la dynamique ne sont pas modifiées

quand on change les signes des vitesses, ce qui revient à changer le signe du temps. Ces équations ne permettent donc pas de prévoir dans l'avenir une évolution différente de ce que serait l'évolution en remontant vers le passé. Dès lors, il semble en résulter que les phénomènes irréversibles sont impossibles. Borel a donné [S., p. 341] une explication de ce paradoxe.

Il admet que cette objection serait valable, si toutes les conditions initiales étaient données avec une exactitude absolue. Mais cette hypothèse lui paraît irréalisable. Cette exactitude absolue devra laisser place à un certain flottement. Il en résulte que l'avenir n'est pas entièrement déterminé, alors qu'on ne peut parler d'une indétermination du passé. Il n'y a donc plus une réversibilité absolue. Dans certains cas, on aura des phénomènes presque réversibles, dans d'autres ils seront irréversibles.

LISTE DES TRAVAUX PAR ANNÉE DE PUBLICATION  
DEPUIS 1940, JUSQU'A LA MORT D'ÉMILE BOREL (1956) <sup>1)</sup>

1940

E. BOREL et S. CHÉRON. Théorie mathématique du bridge à la portée de tous. 134 tableaux de probabilité, avec leurs modes d'emploi. Formules simples, application. Environ 4000 probabilités. (*Monographies des Probabilités, Fas. V. Gauthier-Villars, XXI, t. 392 p.*)

260. Objections à la définition empirique de la probabilité. *C.R. Ac. Sc.*, t. 211, p. 261.

1941

261. Application du calcul des probabilités aux problèmes concernant les nombres premiers. Théorème de Goldbach, *C.R.*, t. 212, p. 317-320.
262. Théorie de l'hérédité, définitions et problèmes, *C.R.*, t. 212, p. 777-780.
263. Sur certains problèmes de l'hérédité connexes au problème de la ruine des joueurs, *C.R.*, t. 212, p. 821-825.

1942

264. Sur l'emploi du théorème de Bernoulli pour faciliter le calcul d'une infinité de coefficients. Application au problème de l'attente à un guichet. *C.R.*, t. 214, p. 452-456.

1946

265. L'axiome du choix et la mesure des ensembles, *C.R.*, t. 222, p. 309-310.
266. Les paradoxes de l'infini. Chez Gallimard.
267. Les ensembles homogènes, *C.R.*, t. 222, p. 617-618.

---

<sup>1</sup> Cette liste fait suite à la liste arrêtée à 1939 et figurant dans le volume « Selecta, jubilé scientifique de Monsieur Emile Borel », chez Gauthier-Villars, 1940 (et désigné par [S] dans le texte).

1947

268. Sur les probabilités dénombrables et le pari de Pascal, *C.R.*, t. 224, p. 77-78.
269. Sur l'illusion des définitions numériques, *C.R.*, t. 224, p. 765-767
270. Les paradoxes de l'axiome du choix, *C.R.*, t. 224, p. 1537-1538
271. Sur les difficultés des définitions asymptotiques, *C.R.*, t. 224, p. 1597-1599.
272. Sur les développements unitaires normaux. *C.R.*, t. 225, p. 51.

1948

273. Sur les sommes de développements unitaires normaux, *C.R.*, t. 226, p. 365.
274. Sur les systèmes généraux de numération, *C.R.*, t. 226, p. 1405-1407.
275. A propos de l'axiome du choix, *Ark. Mat. Ash. Fys.* 34 B, n° 15, 2 p.
276. Sur l'addition vectorielle des ensembles de mesure nulle, *C.R.*, t. 227, p. 103-105.
277. Sur l'addition vectorielle d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle, *C.R.*, t. 227, p. 167-168.
278. Sur la raréfaction  $R$  et l'addition vectorielle des ensembles de mesure nulle, *C.R.*, t. 227, p. 453-455.
279. Sur la somme vectorielle des ensembles non parfaits de mesure nulle; *C.R.*, t. 227, p. 545.
280. Sur la somme vectorielle de deux ensembles de mesure nulle, dont un seul est parfait, *C.R.*, t. 227, p. 790-792.
281. Sur une inégalité numérique et sur l'addition vectorielle de certains ensembles *C.R.*, t. 227, p. 1065-1066.
282. Sur les développements unitaires normaux, *Ann. Soc. Polon. Math.*, t. 21, p. 74-79.
283. Sur les séquences en météorologie, *Annuaire du Bureau des Longitudes*, A1-A 18, 1948.

1949

284. Probabilité et certitude, *Dialectica* 3, p. 24-27.
285. *Eléments de la théorie des ensembles*, Albin Michel, 319 p.
286. Le paradoxe de Saint Pétersbourg, *C.R.*, t. 229, p. 404-405.

287. Sur une propriété singulière de la limite d'une espérance mathématique, *C.R.*, t. 229, p. 429-431.
288. Sur une martingale mineure, *C.R.*, t. 229, p. 1181-1183.

1950

289. Sur les chiffres décimaux de  $\sqrt{2}$  et divers problèmes de probabilités en chaîne. *C.R.*, t. 230, p. 591-593.
290. Analyse et géométrie euclidienne, *C.R.*, t. 230, p. 1989-1990.
291. Leçons sur la théorie des fonctions (Principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions), *Gauthier-Villars*, 4<sup>e</sup> édition; XIII+295 p.
292. Probabilité et certitudes, Presses Universitaires, 136 p.

1951

293. Le calcul numérique des séries divergentes, *C.R.*, t. 232, p. 457-458.
294. Sur l'emploi des coordonnées de la droite pour l'étude des radiations, *C.R.*, 1329-1331.
295. Les décimales de  $e$  et de  $\pi$ , *C.R.*, t. 233, p. 1973-1974.
296. La définition en mathématiques — *Congrès Intern. de Phil. des Sciences. Vol. III, p. 89-99, Actualités Sc. et Ind. Hermann.*
297. Sur une propriété arithmétique des suites illimitées d'entiers, *C.R.*, t. 233, p. 769-770.
298. Sur la transmission d'un caractère héréditaire dans les générations successives *C.R.*, t. 233, p. 1241-1243.
299. Les nombres inaccessibles; avec une note de Daniel Dugué, *Gauthier-Villars*, X+141 p.
300. Démonstration élémentaire du théorème de Dirichlet relatif aux nombres premiers d'une progression arithmétique, *C.R.*, t. 234, p. 769-770.
301. Étude élémentaire de la fréquence des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, *Rend. Cir. Mat. Palermo (2)*, I., p. 111-128.

1953

302. Les nombres premiers, *Presses Universitaires*, 135 p.
303. Sur les intervalles séparant deux nombres premiers consécutifs, *C.R.*, t. 236, p. 1713.

1955

304. Probabilités; Erreurs. Borel, Deltheil et Huron, 9<sup>e</sup> Edition.